This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**A propos de ce livre**

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

**Consignes d'utilisation**

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

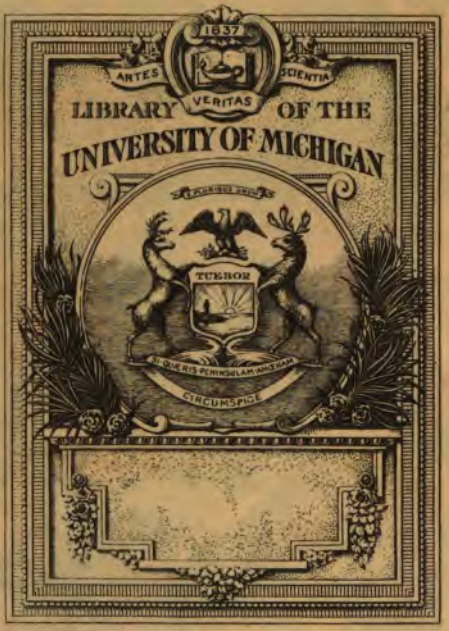
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

**À propos du service Google Recherche de Livres**

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

NON
CIRCULATING

QA
35
.L133
1765

# INSTITUTIONS
DE
# GÉOMÉTRIE,
ENRICHIES
DE NOTES CRITIQUES
ET PHILOSOPHIQUES
SUR LA NATURE ET LE DÉVÉLOPPEMENT
de l'Esprit humain:

*AVEC UN DISCOURS SUR L'ÉTUDE des Mathématiques, où l'on essaie d'établir que les Enfans sont capables de s'y appliquer, augmenté d'une Réponse aux Objections qu'on y a faites.*

OUVRAGE UTILE, NON-SEULEMENT à ceux qui veulent apprendre ou enseigner les Mathématiques par la voie la plus naturelle, mais encore à toutes les personnes qui sont chargées de quelque Education.

*Par M. DE LA CHAPELLE, Censeur Royal, de l'Académie de Lyon, de celle de Rouen, & de la Société Royale de Londres.*

QUATRIÉME ÉDITION,
Revue, corrigée & augmentée par l'Auteur.

*TOME SECOND.*

*A PARIS,*
Chez DEBURE Pere, Libraire, Quai des Augustins, à l'Image S. Paul.

M. DCC. LXV.
*Avec Approbation & Privilege du Roi.*

Hist of Sci.
Lafitte
2-10-28
16267



# TABLE

## DES CHAPITRES ET DES PRINCIPALES Matières contenues dans le ſecond Tome des Inſtitutions de Géométrie.

### *LIVRE II.*

CHAP. I. PRINCIPES *de l'Arpentage. Meſure des Terreins*, pag. 1

*Ce que l'on appelle Arpentage, ou meſure des Terreins*, 2

*Hiſtoire que l'on fait ſur l'origine de l'Arpentage & de la Géométrie*, ibid. *not.* (a)

Propoſition XIV. *Deux Triangles dont tous les côtés ſont égaux, chacun à chacun, ſont égaux en ſurface*, 3

Autre *Démonſtration de la Propoſition XIV*, 4

*Méthode commode imaginée pour meſurer les Triangles*, 5

*Ce que c'eſt qu'un Parallélogramme*, ibid.

Problême LXVIII. *Conſtruire un Rectangle, dont deux côtés contigus ſont donnés*, 7

Problême LXIX. *Conſtruire un Rhomboïde, ou un Parallélogramme oblique plus long que large, dont deux des côtés ſont donnés, avec l'angle compris entre ces côtés*, 8

Problême LXX. *Conſtruire un Rhombe, ou un Loſange, avec une ligne donnée & un angle donné*, ibid.

*Préparation à la meſure du Rectangle* 9

*Ce que c'eſt qu'une toiſe quarrée, un pied quarré, une perche, un arpent, &c.* ibid.

Problême LXXI. *Déterminer la ſurface d'un Rectangle qui a 8 toiſes de long ſur 5 toiſes de large*, 10

*Avantages & commodité du Rectangle*, 11. *not.* (a)
TABLE *des mesures les plus usitées dont on se sert dans l'Arpentage, ou la mesure des terreins*, 12
*Ce que c'est que la base & la hauteur d'un rectangle*, ibid.
Problême LXXII. *Mesurer la surface d'un triangle rectangle, dont la base = 7 pieds & la hauteur 3*, 13
*Pourquoi le Parallélogramme oblique ne sçauroit être pris pour servir de mesure commune à toutes les surfaces*, 14. *not.* (a)
Proposition XV. *Le parallélogramme oblique est égal en surface à un parallélogramme rectangle de même base & de même hauteur; c'est-à-dire, dont la base est égale à la base de l'oblique, & la hauteur égale à la hauteur de l'oblique*, 15
Proposition XVI. *Deux parallélogrammes obliques qui ont des bases & des hauteurs égales, sont nécessairement égaux en surface, quoiqu'ils soient différemment inclinés*, 16
Proposition XVII. *Les triangles dont les bases sont égales, & qui ont même hauteur, ont des surfaces égales*, 17
Problême LXXIII. *Mesurer un Parallélogramme oblique, dont on peut parcourir l'intérieur*, 18
*Des parallélogrammes égaux en surface n'ont pas nécessairement même base & même hauteur*, 19
Problême LXXIV. *Déterminer l'aire ou la surface d'un triangle oblique*, 20
*Des triangles qui ont des surfaces égales, n'ont pas nécessairement même base & même hauteur*, 22
*Des triangles égaux en surface n'ont pas nécessairement tous leurs côtés égaux, chacun à chacun*, ibid.
*Pourquoi certaines Propositions ont des converses, & pourquoi d'autres n'en ont pas*, 22. *not.* (a)
Problême LXXV. *Evaluer la surface d'un trapèze, c'est-à-dire, d'une figure de quatre côtés, dont on en suppose deux parallèles*, 24

Problême LXXVI. *Meſurer un quadrilatère, dont un des angles eſt droit,* 26
Problême LXXVII. *Trouver la ſurface d'un eptagone irrégulier, qui peut ſervir de modèle pour toutes les figures irrégulières,* ibid.
Problême LXXVIII. *Trouver la ſurface d'une pièce de terre bornée par une rivière, dont la rive n'eſt pas en ligne droite,* 27
Problême LXXIX. *Meſurer la ſurface d'un polygone régulier, par exemple, d'un ſallon héxagone, ou de tout autre polygone régulier,* ibid.
Problême LXXX. *Changer une figure, telle qu'un triangle, en une autre figure qui ait un nombre quelconque de côtés, ſans avoir néanmoins plus de ſurface que le triangle,* 28
*Transformer un parallélogramme en une figure de cinq côtés de même ſurface que ce parallélogramme,* 30
*Réduire une figure d'un nombre quelconque de côtés, en une autre qui en ait deux, trois, quatre, &c., de moins, pourvu qu'il ne ſoit pas queſtion de la réduire en une figure qui ait moins de trois côtés,* ibid.
Propoſition XVIII. *Le quarré de l'hypothénuſe eſt égal à la ſomme des quarrés conſtruits ſur les deux autres côtés d'un triangle rectangle,* 32
*Si un triangle eſt tel, que le quarré d'un de ſes côtés ſoit égal à la ſomme des quarrés faits ſur les deux autres côtés, ce triangle ſera néceſſairement rectangle,* 36
*Lorſque l'on connoît les trois côtés d'un triangle, on peut toujours ſe convaincre s'il eſt rectangle, obtuſangle ou acutangle,* 36
Problême LXXXI. *Trouver la ſurface d'un Triangle iſoſcèle, acutangle ou obtuſangle, dont on ne connoît que les trois côtés,* 38
Problême LXXXII. *Déterminer la ſurface d'un triangle ſcalène, obtuſangle ou acutangle, par*

*la ſeule connoiſſance de ſes trois côtés*, 40
*Méthode d'approximation fort ſimple, & fort courte dans la pratique*, 42 & 44. *not.* (a)
RÈGLE GÉNÉRALE *pour le calcul des triangles ſcalènes, acutangles ou obtuſangles, dont on cherche la ſurface, lorſque l'on n'en connoît que les trois côtés*, 45
Problême LXXXIII. *Déterminer la longueur que l'on doit donner aux échelles, afin qu'elles ſoient proportionnées aux murailles que l'on ſe propoſe d'eſcalader*, 46
Problême LXXXIV. *Trouver la ſurface d'un terrein irrégulier, dont on ne peut connoître que le circuit ou le contour*, ibid.
*Premier moyen*, 47
*Second moyen*, ibid.
*Troiſième moyen*, 48
*Quatrième moyen d'évaluer la ſurface d'un terrein inacceſſible au dedans, ſans qu'il ſoit néceſſaire de connoître les angles qui la terminent*, 50
Problême LXXXV. *Lever le plan d'un terrein dont on peut parcourir l'intérieur*, 52
Problême LXXXVI. *Trouver la ſurface d'un polygone régulier, par exemple, d'un baſſin octogone rempli d'eau, ſans entrer au dedans de ce polygone*, 53
Problême LXXXVII. *Trouver la ſurface d'un cercle, au-dedans duquel il eſt libre de s'étendre*, 54
Problême LXXXVIII. *Trouver la ſurface d'un cercle, dont on ſçait que la circonférence contient dix pieds*, 56
Problême LXXXIX. *Evaluer la ſurface d'un cercle, dont le diamètre* $= \frac{11}{14}$ *de pied*, ibid.
Problême XC. *Trouver la ſurface d'un ſecteur de cercle*, 57
Problême XCI. *Moyen méchanique & géométrique de trouver le rayon d'un cercle ou d'un*

*ſecteur, en ſuppoſant ſimplement que l'on puiſſe appliquer quelque meſure ſur une portion de la circonférence ou du ſecteur,* 58

Problême XCII. *Trouver la ſurface d'un ſegment de cercle,* 59

OBSERVATION *ſur la meſure des ſurfaces,* ibid.

*Cas où les inégalités d'un terrein doivent être conſidérées, ou bien, où l'on ne doit y avoir aucun égard,* 60

OBSERVATION *de Polybe au ſujet de ces inégalités. Eloge du Commentaire que M. le Chevalier de Folard a donné de cet Auteur,* ibid. *not.* (a).

*En quoi ces inégalités du terrein ſont ſurtout à conſidérer,* 65. *not.* (a)

Problême XCIII. *Trouver la largeur du plan horiſontal par lequel on doit meſurer un côteau,* 66

CHAPITRE II. *Du toiſé des ſurfaces. Méthode plus ſimple que celle dont on s'eſt ſervi dans le Chapitre précédent. Expoſition du principe de cette méthode. Application à des exemples,* 68

PREMIER EXEMPLE, *où l'on donne la manière de toiſer une ſurface dont la longueur contient des toiſes, des pieds, des pouces, & la largeur ne contient que des toiſes. On ſuppoſe qu'il s'agiſſe de multiplier* 3 *toiſes* 1 *pied,* 1 *pouce, par* 1 *toiſe,* 69

SECOND EXEMPLE *ſemblable au premier. On propoſe de multiplier* 10 *toiſes,* 4 *pieds,* 8 *pouces, par* 5 *toiſes,* 71

TROISIÈME EXEMPLE. *Multiplier* 59 *toiſes,* 2 *pieds,* 7 *pouces, par* 75 *toiſes,* 72

QUATRIÈME EXEMPLE. *On demande le produit de* 45 *toiſes,* 5 *pieds,* 11 *pouces,* 9 *lignes, par* 34 *toiſes,* 73

CINQUIÈME EXEMPLE *Quel eſt le produit de* 15 *toiſes,* 5 *pouces, par* 18 *toiſes,* 76

SIXIÈME EXEMPLE. *Déterminer le produit de*

*25 toises, 3 pieds, 8 lignes, par 32 toises,* 77
SEPTIÈME EXEMPLE. *Trouver le produit de 13 toises, 5 lignes, par 19 toises,* 79
HUITIÈME EXEMPLE, *où les deux dimensions qui se multiplient, sont composées chacune de toises, pieds, pouces, &c. Multiplier 12 toises, 1 pied, 7 pouces 5 lignes, par 5 toises, 2 pieds, 9 pouces,* 80
NEUVIÈME EXEMPLE. *Trouver le produit de 39 toises, 3 pieds, 4 pouces, 9 lignes, par 7 toises, 4 pieds, 9 pouces,* 82
DIXIÈME EXEMPLE. *On demande quel est le produit de 16 toises, 2 pieds, 7 pouces, 3 lignes, par 8 toises, 2 pouces, 4 lignes,* 83
ONZIÈME EXEMPLE. *Déterminer le produit de 24 toises, 2 pouces, 6 lignes, par 20 toises, 4 lignes,* 84
DOUZIÈME EXEMPLE, *où l'on expose un moyen très simple de vérifier un calcul,* 86
CHAPITRE III. *Du partage des terreins,* 89
Problême XCIV. *Diviser un triangle en autant de parties égales qu'il est nécessaire,* ibid.
Problême XCV. *Partager un parallélogramme en quatre parties égales, ou en tout autre nombre de parties égales qu'il en sera besoin,* 90
Problême XCVI. *Diviser en tant de parties égales que l'on voudra un trapèze, dont les deux côtés sont parallèles,* ibid.
Problême XCVII. *Partager un polygone régulier, par exemple, un pentagone, en 9 parties égales: ce qui peut servir de modèle pour le diviser en tant de parties égales que l'on voudra,* 91
PRÉPARATION *à la résolution du Problême, où toutes les divisions d'un terrein doivent partir d'un point déterminé,* 93
Problême XCVIII. *Diviser un terrein quelconque en autant de parties égales qu'il est nécessaire, à*

*condition que toutes les divisions commenceront à un même point pris au-dedans de la figure*, 94
OBSERVATION *sur le partage des terreins*, 96

LIVRE III.

*Géométrie de l'Adolescence, où l'on traite des rapports & des proportions*, 98
*Pourquoi cette partie est appellée de ce nom?* Ibid.
CHAPITRE I. *Des rapports & des proportions numériques & algébriques*, 99
*Ce qu'on appelle rapport & raison*, ibid.
*Différence d'un rapport Arithmétique à un rapport Géométrique*, ibid.
*Ce que c'est qu'une raison composée*, 100
*Manière de bien juger de l'égalité de deux ou de plusieurs rapports*, 101
DES PROPORTIONS, 103
*Ce que c'est que proportion Géométrique & proportion Arithmétique*, ibid.
*Ce qu'on appelle proportion continuë*, ibid.
*Théorême fondamental & unique, dont on déduit toute la théorie des proportions. Dans une proportion Géométrique, le produit des extrêmes est toujours égal au produit des moyens*, 104
*COROLLAIRE I. Si l'on connoît trois termes d'une proportion Géométrique, le terme inconnu sera toujours facile à connoître*, 107
*Usage de cette proprieté pour démontrer la règle de Trois*, ibid.
*COROLLAIRE II. Dans la proportion continuë, le produit des extrêmes est égal au quarré de la moyenne*, 109
Problême. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux grandeurs*, ibid.
*COROLLAIRE III. On a beau changer la place des termes d'une proportion, la proportion subsistera, pourvu que les deux mêmes termes qui sont extrêmes, soient toujours ou moyens ou extrêmes*, 110

*COROLLAIRE IV. Dans une proportion Géométrique, ajoutez aux antécédents, ou retranchez-en ce que vous voudrez, pourvu que les grandeurs ajoutées ou retranchées soient en même rapport que les antécédents, il y aura toujours proportion ; dites la même chose des conséquents,* 111
*COROLLAIRE V. Si l'on multiplie ou si l'on divise les antécédents d'une proportion par une même grandeur, la proportion subsistera : on ne la détruira pas non plus, en multipliant ou en divisant ses conséquents par une même grandeur,* 113
*COROLLAIRE VI. Si l'on suppose deux proportions, en multipliant ou divisant par ordre chaque antécédent par chaque antécédent, & chaque conséquent par chaque conséquent, il y aura encore proportion,* 114
*Quand il y auroit plus de deux proportions, le Corollaire seroit toujours vrai,* ibid.
*Des grandeurs en proportion ont aussi leurs racines de même degré en proportion,* 115
*COROLLAIRE VII. Deux proportions dont les rapports de l'une sont égaux aux rapports de l'autre, donneront encore une proportion, si l'on ajoute par ordre les antécédents aux antécédents, & les conséquents aux conséquents, ou si l'on retranche ces mêmes grandeurs par ordre,* 115
*COROLLAIRE VIII. Dans une proportion continuë, le quarré du premier terme est au quarré du second, comme le premier est au troisième,* 117
*COROLLAIRE IX. Si la proportion continue a quatre termes, le cube de la première est au cube de la seconde, comme la première est à la quatrième,* ibid.
*COROLLAIRE X. Lorsque l'on a une suite de raisons égales, la somme des antécédents est à la somme des conséquents, comme un antécédent quelconque est à son conséquent,* 118

DE LA PROPORTION *Arithmétique*, 119
*Ce que c'eſt, & comment on la marque*, ibid.
THÉORÊME II. *Dans une proportion arithmétique la ſomme des extrêmes eſt toujours égale à la ſomme des moyens*, 120
Problême. *Trois termes d'une proportion arithmétique étant donnés, trouver le quatrième*, 121
*COROLLAIRE. Dans une proportion continuë arithmétique la ſomme des extrêmes eſt égale au double de la moyenne*, ibid.
Problême. *Trouver un moyen proportionné arithmétique entre deux nombres*, 122
DES LOGARITHMES, ibid.
*Ce que l'on appelle logarithmes*, 123
*Le logarithme d'un produit eſt toujours égal à la ſomme des logarithmes des quantités qui ont concouru à former ce produit*, ibid.
*Le logarithme du quotient de deux grandeurs diviſées l'une par l'autre, eſt égal à la différence des logarithmes de ces grandeurs*, ibid.
*Le logarithme d'une grandeur n'eſt que la moitié du logarithme de ſon quarré*, 124, 125
*Le logarithme d'un nombre n'eſt que le tiers du logarithme de ſon cube*, 124, 125
*Uſage des tables des logarithmes*, 126
Problême. *Entre deux grandeurs données trouver deux moyennes proportionnelles*, 127
Problême. *Si* 100 *livres de Veniſe pèſent* 70 *livres de Lyon, &* 120 *livres de Lyon* 100 *livres de Rouen, &* 80 *livres de Rouen* 100 *livres de Toulouſe, &* 100 *livres de Toulouſe* 74 *livres de Genève; combien* 100 *livres de Veniſe font elles de livres de Genève?* 129
Problême ſemblable au précédent. *Un écu de France vaut* 80 *deniers de Hollande;* 415 *deniers de Hollande valent* 240 *deniers d'Angleterre;* 240 *deniers d'Angleterre* 420 *deniers de Hambourg;*

*64 deniers de Hambourg 1 florin de Francfort ; combien 166 écus de France valent-ils de florins de Francfort ?* 131

*En quoi la méthode des Mathématiciens eſt propre à étendre l'intelligence,* 132. *not.* (a)

*Un corps plongé dans l'eau perd quelque choſe de ſa peſanteur,* 134. & ibid. *not.* (a)

Problême. *Un morceau de fonte, ou bien un tronçon d'une pièce d'artillerie étant donné, trouver la quantité de roſette & d'étain, qui en fait l'alliage,* 134

*Origine de ce Problême célèbre ſous le nom de la* Couronne de Hiéron, 139. *not.* (a)

Problême. *On a trouvé qu'un terrein meſuré avec une perche de 22 pieds, contient 1 arpent, 70 perches, 0 toiſes, 30 pieds, 75 pouces quarrés ; ſi on l'avoit meſuré avec une perche de 18 pieds, combien auroit-on trouvé d'arpens, de perches, &c. ?* 145

Problême. *Trouver la ſomme d'une progreſſion Géométrique deſcendante d'un nombre de termes infini,* 148

*COROLLAIRE. Les deux premiers termes d'une progreſſion infinie deſcendante étant donnés, on trouvera la ſomme de tous les termes de cette progreſſion,* 150

*Comment le dernier terme d'une progreſſion deſcendante, dont le nombre des termes croît ſans fin, peut être ſuppoſé = 0,* 151

*COROLLAIRE I. du n°. 272. Si d'une grandeur quelconque on ôte la moitié, après cela la moitié de ce qui reſte, & ainſi de ſuite ſans fin, on parviendra à un reſte plus petit qu'aucune grandeur donnée, ou à un reſte que l'on pourra regarder comme 0,* 152

*COROLLAIRE II. du n°. 272. La ſomme d'une progreſſion Géométrique infinie deſcendante en raiſon quadruple, c'eſt-à-dire, dont le premier*

*terme eſt quadruple du ſecond, le ſecond quadruple du troiſième, & ainſi de ſuite ; cette ſomme eſt au premier terme de la progreſſion, comme 4 eſt à 3,* ibid.

*Ce qu'on entend par l'*Expoſant *d'une progreſſion,* 153

Problême. *Un homme joue contre un autre un* Paſſe-Dix *avec trois dez. Le ſecond a parié d'abord un Louis que le premier ne paſſeroit pas ; celui-ci a paſſé. Le perdant, dont le projet étoit de ſe retirer du jeu dès qu'il auroit gagné un Louis, en met deux pour le ſecond coup, & il les perd. Il en met donc quatre au troiſième coup, qu'il perd encore ; doublant toujours pour le coup ſuivant ce qu'il a perdu dans le précédent, il parvient à perdre tout l'or qu'il portoit : ayant néanmoins continué de parier ſur ſa parole d'honneur, il a perdu 20 coups de ſuite ; après quoi celui qui tenoit les dez a refuſé de tenir les paris, voulant ſçavoir ſi toutes ces pertes réunies n'excédoient pas les facultés de ſon adverſaire,* 155

Problême qui eſt l'inverſe du précédent. *Suppoſons que le perdant de la queſtion précédente prenne ſa revanche, & tienne les dez ; que ſon même adverſaire parie deux Louis pour le premier coup, & qu'il double toujours au coup ſuivant ce qu'il aura perdu dans le précédent, comme on a fait ci-deſſus. Combien doit-il perdre de coups de ſuite, pour que ſon antagoniſte ne lui doive plus rien ou preſque rien ?* 156

*Néceſſité indiſpenſable de l'uſage des logarithmes,* 158. *not.* (a)

*De la progreſſion Arithméthique. Ce que c'eſt,* 160

*Un terme quelconque d'une progreſſion Arithmétique eſt toujours égal au premier terme, joint à la différence de la progreſſion multipliée par le nombre des termes qui le précèdent,* ibid.

*Le dernier terme d'une progreſſion Arithmétique eſt*

*égal au premier, joint à la différence de la progression multipliée par le nombre de tous ſes termes moins* 1, ibid.

*Le premier terme, le dernier, & le nombre des termes d'une progreſſion Arithmétique étant donnés, on en trouvera la différence, en ôtant le premier terme du dernier, & diviſant enſuite ce reſte par le nombre des termes moins* 1, 161

*Déterminer le nombre des termes d'une progreſſion Arithmétique, dont le premier terme, le dernier & la différence ſont donnés, en ôtant le premier du dernier, & diviſant ce reſte par la différence de la progreſſion,* ibid.

*Dans une progreſſion Arithmétique quelconque, la ſomme de deux termes quelconques, à égale diſtance des extrêmes, eſt égale à la ſomme de ces extrêmes,* ibid.

*La ſomme de tous les termes d'une progreſſion Arithmétique quelconque eſt égale à la ſomme des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes de cette progreſſion,* 162

*Si le premier terme d'une progreſſion Arithmétique aſcendante eſt* 0, *la ſomme de tous les termes de la progreſſion ſera égale au dernier terme multiplié par la moitié du nombre des termes,* 163

Problême, *où l'on fait uſage de la progreſſion Arithmétique. On ſe propoſe de planter une Avenue, dont les deux côtés doivent avoir chacun* 300 *toiſes, les arbres à trois toiſes l'un de l'autre. Pour les porter plus commodément à l'endroit de leur deſtination, celui qui en eſt chargé doit les prendre à* 3 *toiſes du premier que l'on plantera. Comme on ſuppoſe leur peſanteur aſſez conſidérable, il ne pourra en tranſporter qu'un ſeul à la fois. Afin donc qu'on puiſſe évaluer le tems qu'il emploiera à ce tranſport, on demande la longueur du chemin qu'il ſera obligé de faire,* 164

*Différence des degrés de latitude*, 165. not. (a).
CHAPITRE II. *Des lignes proportionnelles*, 166
Proposition XVIII. *Les surfaces des triangles quelconques sont entr'elles, comme le produit de leur base par leur hauteur*, ibid.
Problême. *Déterminer le rapport de deux triangles, dont l'un a 8 pieds de base sur 5 de hauteur, & l'autre 12 de base sur 6 de hauteur*, 167
Proposition XIX. *Les triangles de même hauteur sont entr'eux comme leur base; & les triangles de même base sont entr'eux comme leur hauteur*, 168
CONVERSE. *Les triangles qui sont entr'eux comme leur base, ont nécessairement même hauteur; & ceux qui sont entr'eux comme leur hauteur, ont nécessairement même base*, ibid.
Problême. *Trouver le rapport d'un triangle, dont la base = 7 toises, & la hauteur en vaut 4, à un autre triangle, dont la base = aussi 7 toises, & la hauteur 20*, 169
Proposition XX. *Deux triangles égaux en surface, & qui ont même base, ont nécessairement même hauteur, ou sont posés entre les mêmes parallèles*, ibid.
Proposition XXI. *Une ligne qui coupe deux côtés d'un triangle parallèlement à son troisième côté, coupe ces deux côtés en proportion*, 170
CONVERSE. *Si deux côtés d'un triangle sont coupés en parties proportionnelles par une ligne, cette ligne sera nécessairement parallèle au troisième côté*, 172
*COROLLAIRE. I. Les deux côtés d'un triangle, coupés par une ligne parallèle au troisieme côté, sont entr'eux comme leurs parties correspondantes*, 173
*COROLLAIRE II. Si l'on coupe un angle quelconque d'un triangle en deux parties égales, la base de cet angle sera coupée en deux segmens proportionnels aux deux côtés qui forment cet angle*, 174

*COROLLAIRE III. Deux triangles peuvent avoir un angle égal, & des côtés autour d'un autre angle proportionnels, sans être pour cela des triangles équiangles,* 175

Proposition XXII. *Les triangles équiangles ont leurs côtés proportionnels,* 176

*Réciproquement, si les côtés d'un triangle sont proportionnels aux côtés d'un autre triangle, ces triangles sont nécessairement équiangles,* 177

*Ce qu'on appelle triangles semblables,* 178

*COROLLAIRE I. Si un angle d'un triangle est égal à un angle d'un autre triangle, & que de plus les côtés qui sont autour du premier angle, soient proportionnels aux côtés qui sont autour du second angle, il est certain que ces deux triangles sont semblables; ou, ce qui est la même chose, que ces deux triangles sont équiangles,* ibid.

*COROLLAIRE II. Deux triangles sont semblables, quand deux angles de l'un sont égaux à deux angles de l'autre, chacun à chacun,* 179

*COROLLAIRE III. Si les deux triangles D B C, d b c, qui ont les angles C, c, égaux, & les côtés autour des angles B, b, proportionnels, ont encore les angles D, d, de même espèce, c'est-à-dire, tous deux obtus ou tous deux aigus; il faut nécessairement conclure que les angles B, b, compris entre les côtés proportionnels, sont égaux, & par conséquent que ces deux triangles sont semblables,* ibid.

Proposition XXIII. *Si du même point pris au-dehors ou au-dedans du cercle, on tire deux lignes, dont chacune prolongée, s'il le faut, rencontre la circonférence en deux points, je dis, 1°. Si le point est au-dedans du cercle, que les parties de l'une sont réciproquement proportionnelles aux parties de l'autre; & que 2°. Si le point est pris hors du cercle, les lignes entières sont réciproquement*

*proquement proportionnelles aux parties qui ſont hors du cercle*, 180
CONVERSE. *Si deux lignes qui ſe croiſent en un point ſont telles, que les parties de l'une ſoient réciproquement proportionnelles aux parties de l'autre; je dis que les extrémités de ces lignes ſont néceſſairement dans la circonférence d'un même cercle; enſorte qu'en faiſant paſſer une circonference de cercle par trois de ces points pris à volonté, elle paſſera néceſſairement par le quatrième point*, 181
*COROLLAIRE I. Si d'un même point pris hors d'un cercle, on tire une ſécante & une tangente, cette tangente ſera moyenne proportionnelle entre la ſécante entière & ſa partie hors du cercle*, 183
*COROLLAIRE II. Nouvelle démonſtration, que dans un triangle rectangle, le quarré de l'hypothénuſe eſt égal à la ſomme des quarrés faits ſur les deux autres côtés*, 184
*Deux ou pluſieurs cercles, dont les diamètres commencent en un même point, ſur une même ligne, ne ſe touchent qu'en un même point unique; ſoit que leurs convéxités ſe rencontrent, ſoit que la convéxité de l'un rencontre la concavité de l'autre*, 185
*En joignant par une ligne droite les centres de deux cercles qui ſe touchent, cette ligne paſſera néceſſairement par leur point de contingence*, 186
Problême. *Etant donnés trois cercles, qui ſe touchent réciproquement par les extrémités de leurs diamètres, (& que l'on ſuppoſe être les profils de trois cylindres) en trouver un quatrième, qui touche en même tems les trois premiers*, ibid.
Propoſition XXIV. *Une perpendiculaire abbaiſſée d'un point quelconque de la circonférence d'un cercle ſur ſon diamètre, eſt moyenne proportionnelle entre les parties de ce diamètre*, 187

Proposition XXV. *En supposant la même perpendiculaire, si du point de la circonférence d'où elle part, on tire des lignes aux extrémités du diamètre, les triangles que ces lignes formeront seront semblables, ou équiangles,* 188
Remarque. *Si de l'angle droit d'un triangle rectangle on abbaisse une perpendiculaire sur l'hypothénuse, non-seulement cette perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les parties de l'hypothénuse, mais elle divise encore le grand triangle en deux petits triangles semblables au grand triangle, & semblables entr'eux,* 190
Proposition XXVI. *Si de l'angle droit d'un triangle rectangle on abbaisse une perpendiculaire sur l'hypothénuse, chaque côté du triangle devient une moyenne proportionnelle entre l'hypothénuse & le segment qui répond à ce côté,* ibid.
CONVERSE *Si les côtés d'un triangle rectangle deviennent moins proportionnels entre l'hypothénuse entière & les segmens correspondans faits par une ligne abbaissée du sommet de l'angle droit, cette ligne sera nécessairement perpendiculaire sur l'hypothénuse,* 191
Proposition XXVII. *Le quarré fait sur l'hypothénuse d'un triangle rectangle, est égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés de ce triangle,* 192
*Il est bisarre de démontrer l'Arithmétique par la Géométrie,* 193. *not.* (a)
*COROLLAIRE I. Si l'on connoît les deux côtés qui forment un angle droit, on aura la longueur de l'hypothénuse, en tirant la racine quarrée de la somme des quarrés des deux côtés connus,* 194
*COROLLAIRE II. En connoissant l'hypothénuse & l'un des côtés, on trouvera l'autre côté, si on extrait la racine quarrée de la différence qu'il y aura entre le quarré de l'hypothénuse & le quarré du côté connu,* 195

*COROLLAIRE III. La diagonale d'un quarré eſt incommenſurable avec l'un de ſes côtés ; c'eſt-à-dire, qu'en prenant une grandeur quelconque qui meſure éxactement ce côté, cette meſure ne meſurera pas éxactement la diagonale : il y aura toujours de l'excès ou du défaut, & l'on ne pourra pas déterminer le rapport numérique de cet excès ou de ce défaut à la grandeur qui aura ſervi de meſure,* 195

Propoſition XXVIII. *Si du ſommet de l'angle obtus d'un triangle obtuſangle, ou de l'angle aigu d'un triangle acutangle quelconque ſcalène, on abbaiſſe une perpendiculaire ſur le côté oppoſé, il arrivera que le quarré du côté oppoſé à l'angle d'où part la perpendiculaire, eſt égal à la différence des quarrés des deux autres côtés, plus deux fois le rectangle de ce même côté par le petit ſegment,* 196

*COROLLAIRE I. Si l'on connoît les trois côtés d'un triangle obtuſangle ou acutangle, il ſera très-facile de déterminer la valeur de l'un des deux ſegmens faits par une perpendiculaire, que l'on imagineroit abbaiſſée de l'angle obtus ou de l'angle aigu ſur le côté oppoſé à cet angle,* 197

*COROLLAIRE II. On peut évaluer un triangle obtuſangle ou acutangle par la ſeule connoiſſance de ſes trois côtés,* ibid.

*COROLLAIRE III. En nous tenant toujours à la ſuppoſition de la propoſition XXVIII, ſi les deux côtés ſont égaux, la perpendiculaire tombera ſur le milieu de l'autre côté, & rendra par conſéquent égaux les deux ſegmens de ce côté,* 198

*Comment juger par la ſimple connoiſſance des côtés, ſi un triangle eſt rectangle, obtuſangle ou acutangle ?* ibid.

Problême. *Déterminer le rapport des circuits, des contours ou des périmètres des figures ſemblables, différentes du triangle,* 200

*Quelles ſont les figures ſemblables?* 200
*COROLLAIRE I. Si des points A, a, on tire les lignes AD, AC, d'une part, & les lignes ad, ac, d'une autre part; je dis que les périmètres de ces figures ſont entr'eux comme les lignes AD, ad, ou AC, ac, ſemblablement tirées, c'eſt-à-dire, tirées d'un angle à ſon angle correſpondant,* 201
*COROLLAIRE II. Les périmètres ou les circonférences ſont entr'elles comme leurs rayons; ou, ſi l'on veut encore, comme leurs diamètres qui ſont doubles des rayons,* 202
*COROLLAIRE III. Une circonférence eſt double, triple, quadruple, &c. d'une autre circonférence, quand ſon rayon ou ſon diamètre eſt double, triple, ou quadruple du rayon ou du diamètre de cette autre circonférence,* 203
Problême. *Trouver le rapport des ſurfaces des figures ſemblables,* 204
*Remarque ſur la différence du rapport des périmètres au rapport des ſurfaces,* 207
Problême. *Trouver une quatrième proportionnelle Géométrique à trois lignes données,* ibid.
Problême. *Trouver une troiſième proportionnelle à deux lignes données,* 208
Problême. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données,* ibid.
Problême. *Couper une ligne en moyenne & extrême raiſon,* 209
Problême. *Déterminer le rapport d'un côté du décagone inſcrit dans un cercle au rayon de ce cercle,* 210
Problême. *Trouver par une ſeule conſtruction le côté du décagone & celui du pentagone, inſcriptibles au même cercle,* 212
Problême. *Trouver une moyenne proportionnelle Arithmétique entre deux lignes données,* 215
Problême. *Avec une ligne donnée faire un paral-*

*lélogramme égal en ſurface à un parallélogramme donné*, 216
Problême. *Transformer en quarré un rectangle donné; c'eſt-à-dire, trouver un quarré dont la ſurface ſoit égale à celle de ce rectangle*, ibid.
Remarque. *Plus les figures approchent d'être régulières, c'eſt-à-dire, moins leurs côtés different les uns des autres, moins auſſi ils ont de circuit par rapport à l'aire ou à la ſurface que renferment ces côtés*, 217
*Comment les Abeilles* géométriſent *dans la conſtruction de leurs alvéoles?* 218
*De toutes les figures régulières du même circuit, le cercle eſt celle qui renferme un plus grand eſpace*, 223
*L'aire d'un polygone régulier quelconque eſt plus petite qu'un cercle du même circuit*, 225
Problême. *Quarrer un triangle, ou déterminer le quarré dont la ſurface ſoit préciſément égale à celle d'un triangle*, 226
Problême. *Faire que deux ou pluſieurs parallélogrammes donnés aient la même hauteur, ſans changer de ſurface*, 227
*COROLLAIRE I. En réduiſant à la même hauteur tel nombre de parallélogrammes que l'on voudra, on en pourra toujours faire un ſeul parallélogramme*, 228
*COROLLAIRE II. On peut trouver un ſeul quarré égal en ſurface à tel nombre de parallélogrammes que l'on voudra ſuppoſer*, 229
Problême. *Trouver un ſeul triangle égal à pluſieurs triangles donnés*, ibid.
*COROLLAIRE III. On peut trouver un ſeul quarré égal à tel nombre de triangles que l'on voudra, après avoir réduit tous les triangles en un ſeul*, 230
Problême. *Transformer un trapèſe dont les deux côtés ſont parallèles, en un parallélogramme qui*

*lui ſoit égal en ſurface*, ibid.
*COROLLAIRE. Moyen d'évaluer un trapèſe*, 231
Problême. *Quarrer un cercle, c'eſt-à-dire, trouver un quarré dont la ſurface ſoit égale à celle d'un cercle propoſé*, 232
Problême. *Trouver un quarré égal à tant de quarrés que l'on voudra*, 233
Problême. *Trouver un cercle égal à la ſomme de deux cercles, ou égal à tant de cercles que l'on voudra*, 234
*COROLLAIRE. Quand un triangle rectangle eſt iſoſcèle, ſi l'on conſtruit des demi-cercles ſur chaque côté, il en réſulte la quadrature d'une portion de cercle. Quadrature de la Lunule d'Hypocrate*, 235
Problême. *Elever une perpendiculaire ſur l'extrémité d'une ligne, en faiſant uſage de la propriété du quarré de l'hypothénuſe*, 236
Problême. *Deux cercles concentriques, ou qui ont le même centre, étant donnés, trouver le cercle auquel eſt égale la couronne circulaire compriſe entre les deux circonférences de ces cercles*, 237
Problême. *Réduire une figure quelconque de grand en petit, c'eſt-à-dire, trouver une autre figure ſemblable plus petite, qui ait avec elle un rapport quelconque*, 238
*En quoi conſiſte l'eſprit de la Géométrie*, 240. *not.* (a)
Problême. *Réduire un plan de Fortification de grand en petit*, 241
Problême. *Réduire de petit en grand une figure quelconque ſelon tel rapport que l'on voudra*, 242
*Expédient propoſé aux Commençans, pour les tirer d'embarras lorſqu'ils auront une figure à tranſformer de petit en grand*, 247
Problême. *Lever le plan, ou faire la Carte d'un pays ou d'une campagne quelconque*, 251
*Quels angles on doit prendre pour la réſolution de ce Problême?* 255

Problême. *Déterminer la distance d'une montagne à des points donnés*, 256
Problême *Sur une ligne donnée construire un segment de cercle capable d'un angle donné, c'est-à-dire, construire un segment, dans lequel on puisse inscrire un angle égal à un angle donné*, 260
Problême. *Couper une ligne en parties proportionnelles aux parties d'une autre ligne*, 263
Problême. *Construire une échelle qui représente des toises, des pieds, des pouces*, 264

## LIVRE IV.

Où l'on traite de la Mesure des Solides.

CHAPITRE I. *Génération des solides. Evaluation de leurs surfaces*, 266
*Ce qu'on appelle solides en Géométrie*, ibid.
Problême. *Déterminer la surface d'un cube, d'un parallélipipède, d'un prisme*, 268
Problême. *Trouver la surface d'un cylindre droit*, 270
Problême. *Mesurer la surface d'une pyramide*, 272
Problême. *Trouver la surface d'un cône droit*, 273
*COROLLAIRE I. Si l'on construit un triangle rectangle, dont la base soit égale à la circonférence de la base circulaire d'un cône, & la hauteur égale au côté du même cône, ce triangle rectangle sera égal à la surface convexe de ce cône*, 274
*COROLLAIRE II. En retranchant de la hauteur de ce triangle une partie égale à une partie du côté du cône, si l'on tire SP parallèle à cm, cette parallèle SP sera égale à la circonférence de la base du petit cône supérieur*, ibid.
*COROLLAIRE III. La surface convexe du petit cône DTS est égale à la surface du petit triangle rectangle dSP*. 275
Problême. *Trouver la surface d'un cône tronqué*, ibid.
*Génération de la sphère*, 277

*Noms que l'on donne à certaines parties de la sphère*, 277
Problême. *Déterminer la surface de la sphère*, 278
*COROLLAIRE I. Si l'on circonscrit un cylindre à la sphère, c'est-à-dire, si l'on enferme la sphère dans un cylindre qui touche la sphère partout où il la peut toucher, la surface convèxe du cylindre circonscrit sera égale à celle de la sphère*, 281
*COROLLAIRE II La surface de la sphère est quadruple de la surface de l'un de ses grands cercles*. ibid.
*COROLLAIRE III. La surface d'une zone de la sphère est égale à un rectangle, qui auroit pour base la circonférence d'un grand cercle de la sphère, & une hauteur égale à une partie de l'axe compriſe entre les deux cercles qui terminent la zone*, 282
Problême. *Trouver le rapport de la surface totale du cylindre à celle de la sphère inscrite à ce cylindre*, ibid.
Problême. *Déterminer le rapport des surfaces des corps semblables*, 283
*COROLLAIRE. Les surfaces des sphères sont entr'elles comme les quarrés de leurs diamètres, ou comme les quarrés de leurs rayons*, ibid.
CHAPITRE II. *De la solidité des corps. Principes & vérités sur lesquels on en fonde l'évaluation*, 285
Proposition I. *La commune section de deux plans quelconques est nécessairement une ligne droite*, 286
Proposition II. *Deux plans parallèles, coupés par un troisième plan, donnent des sections parallèles rectilignes*, 287
Proposition III. *Si une pyramide quelconque est coupée par un plan parallèle à sa base, non-seulement il en naîtra une coupe parallèle au plan de la base de la pyramide; mais toutes les lignes qui*

*forment le contour de cette coupe, seront parallèles à toutes les lignes du périmètre de la base, chacune à leur correspondance,* 288

Proposition IV. *La coupe parallèle à la base d'une pyramide est un polygone semblable à cette base,* 289

REMARQUE, *où l'on fait voir que des figures peuvent être équiangles, sans avoir leurs côtés proportionnels, & réciproquement qu'elles peuvent avoir leurs côtés proportionnels, sans être équiangles,* 290

Proposition V. *Les pyramides de même base & de même hauteur sont égales en solidité; ou, ce qui est la même chose, deux pyramides dont les bases sont égales, ont aussi une égale solidité, quand elles sont d'ailleurs situées entre les mêmes plans parallalèles,* 291

*COROLLAIRE. Les cônes étant des pyramides régulières d'un très-grand nombre de petites surfaces insensibles, il s'ensuit que les cônes sont non seulement égaux en solidité aux cônes, mais encore aux pyramides de même hauteur & de base égale,* 293

Proposition VI. *On peut toujours diviser un prisme droit triangulaire en trois pyramides triangulaires égales,* ibid.

*COROLLAIRE. Une pyramide triangulaire, ou un cône, n'est que le tiers d'un prisme triangulaire de même base & de même hauteur,* 295

Proposition VII. *Les prismes triangulaires dont les bases sont égales, & qui ont même hauteur, ou qui sont posés entre les mêmes plans parallèles, ont aussi une solidité égale, soit que ces prismes soient tous deux droits, ou tous deux obliques, ou enfin que l'un soit droit & l'autre incliné,* ibid.

Proposition VIII. *Un parallèlipipède est toujours égal à un autre parallélipipède de même base & de même hauteur,* 296

Proposition IX. *Un prisme polygone quelconque, droit ou oblique, c'est-à-dire, un prisme dont la base est un polygone quelconque, est égal en solidité à tout autre prisme polygone de même base & même hauteur,* 297
*COROLLAIRE I. Les cylindres de même base & de même hauteur sont égaux en solidité,* ibid.
*COROLLAIRE II. Un prisme polygone quelconque est toujours le triple d'une pyramide polygone quelconque de même base & de même hauteur,* ibid.
*COROLLAIRE III. Un cylindre a trois fois plus de solidité qu'un cône ou une pyramide de même base & de même hauteur; ou, ce qui revient au même, un cône ou une pyramide n'est que le tiers d'un cylindre, ou d'un prisme de même base & de même hauteur,* 298
Problême. *Trouver la solidité d'un parallélipipède droit, haut de trois toises, sur une base dont la longueur égale six toises, & la largeur en vaut quatre,* 299
*COROLLAIRE I. On détermine la solidité d'un prisme quelconque, en faisant le produit de ses trois dimensions, longueur, largeur, épaisseur,* 300
*COROLLAIRE II. Une toise cube contient 216 pieds cubes,* ibid.
TABLE *des mesures cubiques les plus usitées,* 301
Problême. *Déterminer la solidité d'une pyramide ou d'un cône quelconque,* ibid.
Problême. *Trouver la solidité d'un cône droit tronqué, dont on connoît les circonférences ou les diamètres des bases & un côté,* 302
*Autre solution assez commode dans la pratique, pour trouver la solidité d'un cône ou d'une pyramide tronquée, indépendamment de la hauteur d'un petit cône élevé,* 303
Remarque I. *On trouve la base moyenne proportionnelle Géométrique entre la supérieure & l'inférieure du cône tronqué, en multipliant la cir-*

*conférence de la grande baſe par la moitié du rayon de la petite circonférence ſupérieure du cône tronqué*, 306
Remarque II. *Une moyenne proportionnelle Géométrique entre la moitié du rayon du grand cercle, & la moitié du rayon du petit cercle du cône tronqué, eſt le demi rayon d'un cercle égal à la baſe moyenne cherchée*, ibid.
Problême. *Déterminer la ſolidité de la ſphère*, 307
*COROLLAIRE I. La ſphère eſt égale à une pyramide, ou à un cône, qui auroit pour baſe la ſurface de la ſphère, & pour hauteur ſon rayon*, 308
*COROLLAIRE II. En général, les ſolides de même eſpèce ſont entr'eux comme le produit des dimenſions, qui concourent à déterminer leur ſolidité*, ibid.
*COROLLAIRE III. Quand les ſolides ſont des corps ſemblables, c'eſt-à-dire, quand les dimenſions de l'un ſont proportionnelles aux dimenſions de l'autre, ces corps ſont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues*, 309
*COROLLAIRE IV. Un gros ſolide a moins de ſurface à proportion, qu'un petit ſolide de même matière*, 310
Problême. *Trouver le rapport de la ſolidité de la ſphère à celle du cylindre circonſcrit*, ibid.
*COROLLAIRE. La ſolidité de la ſphère eſt à la ſolidité du cylindre circonſcrit, comme la ſurface de la ſphère eſt à celle du même cylindre*, 311
Problême. *Transformer une pyramide, un cône ou une ſphère, en un parallélipipède qui lui ſoit égal en ſolidité*, ibid.
Problême. *Transformer un cylindre, ou un priſme polygone quelconque, en un parallélipipède de même ſolidité*, 312
Problême. *Faire un cube égal à un parallélipipède donné*, ibid.
*De la duplication du cube, & de ce qui en fut l'occaſion*, 314 & ibid. *not.* (a)

Problême. *Trouver organiquement deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données*, 315
*Réſolution organique de Platon*, 316
Problême. *Trouver organiquement entre deux lignes données tant de moyennes proportionnelles que l'on voudra. Réſolution organique de M. Deſcartes*, 317
Problême. *Trouver géométriquement trois moyennes proportionnelles entre deux lignes données*, 320
Problême. *Déterminer un parallélipipède qui ne ſoit que les* $\frac{1}{2}$ *d'un parallélipipède ſemblable donné*, 321
Problême. *Trouver la ſolidité d'un corps brut*, 323
CHAPITRE III. *Du toiſé des ſolides*, 325
*Ce que c'eſt que toiſer un ſolide*, ibid.
Problême. *Trouver la ſolidité d'un parallélipipède, dont la largeur égale 2 toiſes, 1 pied, 3 pouces; la longueur 3 toiſes, 2 pieds, 4 pouces, & la hauteur 1 toiſe, 5 pieds, 9 pouces*, 327
Problême. *Déterminer la ſolidité d'un corps, dont la longueur égale 15 toiſes, 5 pieds, 3 pouces; la largeur 6 toiſes, 2 pieds, 6 pouces, & la hauteur 8 toiſes, 3 pieds, 9 pouces*, 329
Problême. *On demande la ſolidité d'un priſme quelconque, dont la première dimenſion égale 3 toiſes, 1 pied, 7 pouces; la ſeconde 2 toiſes, 4 pieds, 9 pouces, & la troiſième 2 pieds, 11 pouces*, 331
Problême. *La longueur d'un parallélipipède égale 5 pieds, 9 pouces, 6 lignes. Sa largeur eſt de 2 pieds, 4 pouces, 3 lignes; & ſon épaiſſeur égale 3 pieds, 6 pouces. Quelle eſt la ſolidité de ce corps?* 333
EXAMEN *de la méthode des Indiviſibles*, 335
*Réfutation Géométrique des raiſons ſur leſquelles on fonde cette méthode*, 336
CHAPITRE IV. *De la ſolidité des corps ſelon la méthode des Anciens, appellée méthode d'Exhauſtion*, 343

Proposition I *Les prismes triangulaires droits ou également inclinés, de hauteur égale, & dont les bases sont égales & semblables, sont égaux en solidité,* 344

Proposition II. *Les parallélipipèdes de même base & de même hauteur ont une solidité égale,* ibid.

Proposition III. *On trouve la solidité d'un parallélipipède droit ou oblique, en multipliant sa base par sa hauteur,* 345

Proposition IV. *Les parallélipipèdes quelconques qui ont des bases & des hauteurs égales, sont égaux en solidité,* ibid.

Proposition V. *Les prismes triangulaires quelconques, droits ou obliques, qui ont une égale hauteur, & des bases égales, sans les supposer semblables, sont égaux en solidité,* 346

*COROLLAIRE. On détermine la solidité d'un prisme triangulaire, en multipliant sa base triangulaire par sa hauteur,* ibid.

Proposition VI. *Les prismes polygones quelconques, qui ont des bases & des hauteurs égales, ont une égale solidité,* 347

*COROLLAIRE On détermine la solidité d'un prisme polygone quelconque, en faisant le produit de sa base par sa hauteur,* ibid.

Proposition VII. *Les prismes polygones quelconques de même hauteur, sont entr'eux comme leur base,* ibid.

Lemme I. *Si l'on inscrit & si l'on circonscrit sans fin un très-grand nombre de parallélogrammes à une figure plane quelconque, je dis que la somme des parallélogrammes inscrits différera de la somme des parallélogrammes circonscrits, moins que d'une surface donnée quelconque, si petite qu'elle puisse être,* 348

*COROLLAIRE. La somme des rectangles inscrits, ou celle des circonscrits, peut être telle, que sa différence avec le triangle soit inassignable;*

*deſorte que la ſomme des circonſcrits, celle des inſcrits & le triangle, deviendront égaux en dernier reſſort,* 349
Lemme II. *Si l'on inſcrit à une pyramide triangulaire un très-grand nombre de priſmes triangulaires, je dis que leur ſomme ſe confondra enfin avec la pyramide, ou que la ſolidité totale de ces priſmes inſcrits ne ſera pas différente de celle de la pyramide,* 350
Propoſition VIII. *Les pyramides triangulaires de même hauteur ſont entr'elles comme leurs baſes,* 351
Propoſition IX. *En général, les pyramides de même hauteur ſont entr'elles comme leurs baſes, de quelque figure que ces baſes puiſſent être,* 353
Propoſition X. *Les pyramides quelconques de même hauteur & de même baſe, ou de baſes égales, ont une égale ſolidité,* 354
*Hiſtoire de Saunderſon, Mathématicien Anglois, aveugle preſque de naiſſance,* 355. *not.* (a)
*Eloge du toucher,* ibid.
Propoſition XI. *La ſolidité d'une pyramide droite ou oblique eſt egale au produit de ſa baſe par le tiers de ſa hauteur. Démonſtration de Saunderſon,* 356
*COROLLAIRE. Dans les pyramides égales, & généralement dans tous les corps égaux en ſolidité, la baſe & la hauteur ſont en raiſon réciproque,* 358
*Récapitulation de la méthode d'Exhauſtion. Confirmation de cette méthode,* 359
Propoſition I. *Si deux grandeurs ſont la limite d'une même quantité, ces deux grandeurs ſeront égales entr'elles,* 360
Propoſition II. *Si l'on a le produit de deux grandeurs, & le produit des limites de ces deux grandeurs, je dis que le produit des limites ſera néceſſairement la limite du produit des deux grandeurs,* 361
Remarque, *où l'on démontre à la rigueur, que la ſurface du cercle eſt égale au produit de la demi-circonférence par le rayon,* 362

*COROLLAIRE. Si l'on pouvoit déterminer géométriquement la longueur de la circonférence du cercle, c'eſt-à dire, ſi l'on pouvoit la rectifier, on auroit à la rigueur la quadrature du cercle,* 363
De la Trigonométrie rectiligne par les ſinus, 364
*Les angles d'un triangle ne ſont pas entr'eux comme les côtés oppoſés à ces angles,* 366
*Les angles d'un triangle ne ſont pas entr'eux comme les cordes correſpondantes,* 367
*Les côtés d'un triangle ne ſont pas entr'eux comme les cordes des angles oppoſés à ces côtés,* ibid.
*Première démonſtration de cette vérité,* ibid.
*Seconde démonſtration de la même,* 370
*Troiſième démonſtration de M. le P. Féry, Minime,* 371
*Les côtés d'un triangle ſont entr'eux comme les cordes du double des angles oppoſés à ces côtés,* ibid.
*Le ſinus d'un angle n'eſt que la moitié de la corde du double de cet angle,* 373
*Les côtés d'un triangle ſont entr'eux comme les ſinus des angles oppoſés à ces côtés,* ibid.
*Idée de la manière dont les tables des ſinus ont été conſtruites,* 375
*Comment on a déterminé en nombres la valeur de la tangente & de la ſécante de chaque angle,* 378
*Idée de l'uſage des tables des ſinus,* 381
*Réſolution de tous les Problêmes de la Trigonométrie par cette propoſition unique : dans un triangle, les ſinus des angles ſont entr'eux comme les côtés oppoſés à ces angles,* 383
Problême I. *Trouver la diſtance de deux objets inacceſſibles,* 384
Problême II. *Deux côtés d'un triangle étant donnés, avec l'angle intercepté entre ces côtés, trouver le troiſième côté,* 385
Problême III. *Deux côtés inegaux d'un triangle étant donnés, avec l'angle oppoſé à l'un de ces côtés, trouver le troiſième,* 388
Concluſion. *Deux triangles peuvent avoir deux côtés*

*égaux, chacun à chacun, avec un angle égal opposé au même côté, & être néanmoins fort différens,* ibid.
Problême IV. *Les trois côtés d'un triangle étant connus, en déterminer la valeur de chaque angle,* 390
*Utilité des tangentes dans la résolution des Problêmes de la Trigonométrie par les sinus,* 395
Conclusion. *Dans un triangle scalène la moitié de la somme de deux côtés donnés est à la moitié de leur différence, comme la tangente de la demi-somme connue des deux angles inconnus est à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles,* 400
*Dans quel sens la découverte des Arts les plus utiles à la société est dûe au hasard,* 401. *not.* (a)
Problême. *Trouver d'en bas la hauteur d'une élévation perpendiculaire à l'horison, tels que sont les arbres, les clochers, les pyramides, les édifices qui s'élèvent, comme l'on sçait, perpendiculairement à l'horison,* 403
*Trouver, par une seule station, les distances de cette station à trois points, dont les éloignemens respectifs sont connus,* 405 & 406
*Différentes circonstances de ce Problême. Cas où il est impossible. Caractère de cette impossibilité,* 406, 407, 408, 409
Problême. *Trouver le rapport approché du diamètre d'un cercle à sa circonférence,* 410
Problême. *Trouver la surface de la base d'une Tour circulaire inaccessible,* 412
Problême. *Trouver les degrés d'un arc accessible, au centre duquel il n'est pas possible de placer un instrument,* 413
*COROLLAIRE. Par les degrés connus d'un arc de cercle, & par sa longueur aussi connue en toises, pieds, &c., déterminer l'aire du cercle auquel cet arc appartient,* 415

Fin de la Table des Matières.

# SUITE
# DES INSTITUTIONS.

## *LIVRE II.*

## CHAPITRE PREMIER.

### *Principes de l'Arpentage. Meſure des Terreins.*

149. JUSQU'A préſent nous n'avons conſidéré que les angles & les lignes qui entrent dans la compoſition d'une figure. Ce ne ſont-là, pour ainſi dire, que les dehors qui doivent nous conduire à ſon intérieur. Il importe extrêmement de ſçavoir évaluer la ſurface renfermée au-dedans d'une figure. Par-là on aſſure à chaque membre d'une ſociété les poſſeſſions que les Loix lui attribuent. L'intérêt & le bon ordre ſont encore ici les motifs qui ont déterminé les hommes à rechercher une méthode de meſurer avec exactitude une portion de terre, un jardin,

un champ, une plaine. L'art de faire ces mesures s'appelle *Arpentage*, ou mesure des terreins (*a*), dont nous allons donner les principes, afin de nous étendre avec connoissance de cause sur les pratiques qui font le principal objet de l'Arpentage.

150. Rappellons-nous le problême 40 (n°. 111.), où nous avons enseigné la manière de faire passer une circonférence de cercle par trois points qui ne sont pas sur une même ligne droite. Il est clair que si l'on transportoit ces trois points sur une autre surface que celle où on les a d'abord supposés, & qu'on les mît les uns à l'égard des autres précisément dans la même distance où ils étoient sur le premier plan; il est clair, dis-je (*b*), que la nouvelle circonférence, que l'on feroit passer par ces trois points, seroit entiérement égale à la première, puisque la disposition de ces points est sup-

(*a*) J'ai vu partout conter une histoire sur l'origine de l'Arpentage, que l'on me permettra de traiter de fabuleuse, ou de supposée. Les Egyptiens, dit-on, sont les inventeurs de la Géométrie, parce que le débordement du Nil, qui couvre régulièrement tous les ans le terrein de l'Egypte, confondant toutes les bornes qui servent aux Particuliers à reconnoître & à déterminer l'étendue de leurs champs, c'étoit une nécessité d'avoir une mesure précise qui rendît à chacun ce qui lui appartenoit; ainsi les premiers Egyptiens, suivant cette opinion, furent obligés de penser à la maniere d'évaluer la surface d'un champ; d'où nous est venu l'Art de l'Arpentage ou de la Géométrie.

Ne seroit-il pas plus sage d'attribuer l'origine de la Géométrie à la cupidité générale des hommes, à la distinction forcée du tien & du mien, à leurs passions? La crainte d'être mal & l'envie d'être mieux ont invité les hommes à former des sociétés; l'excès de leurs passions a imposé la nécessité aux plus sages ou aux plus forts d'entr'eux d'établir des Loix, pour retenir chaque membre dans les bornes que l'on a jugé à propos de leur prescrire. Il a donc fallu faire des divisions, & penser par conséquent à l'art de les exécuter. Voilà, je crois, l'origine de l'Arithmétique & de l'Arpentage, qui ont dû prendre naissance dans tous les lieux de la terre, où il s'est formé des Sociétés.

On se gardera donc bien d'amuser les jeunes gens à toutes ces petites histoires sur l'origine des Sciences & des Arts; cela n'est propre qu'à retrécir l'esprit, à moins qu'on ne leur en parle, pour en montrer le frivole.

(*b*) Ceux qui ne seront pas pleinement satisfaits de cette supposition, pourront la prouver par le moyen de la deuxieme Démonstration de la Proposition XIV, *page* 4.

posée précisément la même que celle qu'ils avoient auparavant.

Faisons aussi attention qu'à cause de l'uniformité de la circonférence circulaire, les cordes égales tracées dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, retranchent ou soutiennent des arcs égaux.

Ces deux vérités sont si palpables, que c'est les avoir démontrées que d'y avoir fait penser.

## PROPOSITION XIV.

151. Deux Triangles ABC, CDM (*fig. 1.*), dont tous les côtés sont égaux, chacun à chacun, sont égaux en surface. Pour peu que l'on réfléchisse sur cette proposition, on peut la mettre au nombre des Axiômes. Voici néanmoins comme je la démontre.

## DÉMONSTRATION.

Comme l'on suppose que les côtés de ces Triangles sont égaux, chacun à chacun, c'est-à-dire, que AB=CD; BC=DM; AC=CM: si l'on démontre de plus que les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun, il est évident que ces deux Triangles seront égaux en tout. Circonscrivons une circonférence à chacun de ces Triangles; les deux circonférences seront égales (n°. 150.), puisque les trois points A, B, C ont précisément la même disposition que les trois points C, D, M. Dans ce cas les trois côtés du Triangle ABC deviendront des cordes, aussi-bien que les trois côtés du Triangle CDM. Ces cordes sont, par la supposition, égales, chacune à chacune; ainsi les arcs soutenus par ces cordes seront égaux, chacun à chacun (n°. 150.); & par conséquent les moitiés de ces arcs seront aussi égales, chacune à chacune: or ce sont les moitiés de ces arcs qui mesurent les angles des deux Triangles ABC, CDM (Prop.

13. n°. 104.) ; donc les angles du Triangle ABC ſont égaux aux angles du Triangle CDM, chacun à chacun : ces deux Triangles ne diffèrent donc ni par leurs angles, ni par leurs côtés ; ils ſont donc parfaitement égaux ; C. Q. F. D.

Ceux qui ne feront pas auſſi ſcrupuleux que je le ſuis de déduire leurs propoſitions immédiatement les unes des autres, & qui ſe ſoucieront peu de faire ſervir la treizième propoſition à la démonſtration de la quatorzième, pourront démontrer cette propoſition de la manière ſuivante.

## *AUTRE DÉMONSTRATION de la Propoſition 14.*

Il eſt certain que deux figures ſont égales en ſurface, quand elles ſont conſtruites, ou qu'elles ſont engendrées préciſément de la même maniere & avec les mêmes dimenſions : or, ſi l'on vouloit engendrer ou conſtruire un Triangle avec les trois lignes AB, AC, BC, on agiroit préciſément de même que ſi on avoit à le conſtruire avec les trois lignes CD, CM, DM (n°. 76.) ; il en réſulteroit donc la même choſe ; C. Q. F. D.

La converſe de cette propoſition eſt fauſſe : c'eſt-à-dire, il eſt faux que des Triangles égaux en ſurface aient tous leurs côtés égaux, chacun à chacun. On le prouvera n°. 177.

152. Ceci ſuppoſé, il y a deux choſes à obſerver dans l'étendue d'un terrein, ſa longueur & ſa largeur : ainſi par la connoiſſance de ces deux dimenſions, on doit évaluer toutes ſortes de terreins. Cette évaluation n'oppoſeroit pas de grandes difficultés, ſi la ſurface d'une portion de terre étoit uniformément étendue en long & en large, comme la figure ABCD, (*fig. 2.*) où les longueurs AB, CD, ſont égales, de même que les largeurs AD,

BC le ſont auſſi : de ſorte que toute l'étendue de cette figure eſt déterminée par la connoiſſance d'une ſeule longueur & d'une ſeule largeur. Quand les deux dimenſions ſont égales, comme dans le quarré, l'opération eſt encore plus ſimple : mais il eſt rare que la nature, ſans le ſecours de l'art, offre une régularité ſi parfaite ; pour l'ordinaire une ſurface, qui ſe préſente à meſurer, ne conſerve aucune uniformité, ni dans ſa longueur ni dans ſa largeur. Telle eſt la figure 3. Il eſt donc beſoin de la rappeller à une figure plus ſimple, ou de la décompoſer en pluſieurs figures, dont on puiſſe avoir facilement la meſure. Il eſt évident qu'en tirant des lignes d'un point D aux angles A, B, la figure ABCDE ſe trouvera diviſée en trois Triangles ; & que s'il y a une méthode commode de meſurer le Triangle, quelqu'irréguliere que ſoit une figure, on en aura la meſure en prenant la valeur de tous les Triangles qui la compoſent. Mais le Triangle lui-même eſt encore une figure aſſez biſarre : il n'eſt ni également long, ni également large ; il faut donc recourir à quelqu'autre figure qui ait cette propriété, & dont le Triangle ſoit une partie connue. Or c'eſt ce qu'ont fait les Géomètres : ils ont conſidéré un *quadrilatère*, ou une figure de quatre côtés, (*fig. 2.*) dont les côtés oppoſés A B, D C ſont parallèles, de même que les côtés AD, BC ; ce qui fait que la longueur & la largeur de cette figure ſont uniformes, puiſque les parallèles, pendant tout leur cours, gardent entr'elles une égale diſtance. La figure ABCD eſt un *parallélogramme*.

153. Enſuite ils ont remarqué qu'une ligne menée d'un angle D à l'angle B oppoſé, & qu'ils ont nommée *Diagonale*, diviſoit le parallélogramme en deux Triangles BAD, BCD égaux entr'eux, puiſque tous les côtés de l'un ſont égaux à tous les

côtés de l'autre, chacun à chacun : car AB=CD ; & BC=AD ; la ligne DB eſt commune à l'un & à l'autre Triangle. Ainſi le Triangle BAD = le Triangle BCD, (n°. 151.)

154. D'où il ſuit, que l'on peut toujours conſidérer un Triangle quelconque comme la moitié d'un parallélogramme ; par exemple, le Triangle ABC, (*fig. 4.*) ſe trouvera la moitié du parallélogramme ABCD, en menant par le point C la ligne CD égale & parallèle à la ligne AB, & tirant du point A au point D la ligne AD.

155. Il ſuffit donc de ſçavoir meſurer le parallélogramme, dont la longueur & la largeur ſont des dimenſions uniformes, pour avoir avec préciſion la juſte meſure des Terreins les plus biſarres, pourvu néanmoins qu'ils ſoient terminés par des lignes droites : car on peut les réduire en Triangles, & rapporter les Triangles aux parallélogrammes dont ils ſont la moitié. De ſorte donc que toute la Théorie de l'Arpentage ſe réduit à trouver une méthode de meſurer la ſurface d'un parallélogramme, ce qui ne doit pas être fort difficile, à cauſe de l'uniformité de ſes dimenſions.

156 Le parallélogramme peut être *droit* ou *oblique*. On appelle parallélogramme droit, celui qui a tous ſes angles droits ; telle eſt la figure 5, que l'on nomme encore un *rectangle*, lorſqu'elle eſt plus longue que large. C'eſt un *quarré*, ſi la longueur eſt égale à la largeur.

157. On a donné le nom de parallélogramme oblique à celui dont les angles ſont aigus & obtus, parce que ſes angles ſont formés par des lignes obliques. La figure 6 eſt un parallélogramme oblique, que l'on appelle en particulier *Rhomboïde*, lorſque ſes deux dimenſions ſont inégales ; mais on nomme *Rhombe* ou *Loſange* le parallélogramme oblique

qui a tous ſes côtés égaux, comme la figure 7.

158. En général tout quadrilatère qui a ſeulement deux côtés parallèles, comme la figure 9, eſt appellé *Trapèſe*; & s'il n'a aucun de ſes côtés parallèles, c'eſt un *Trapéſoïde*.

Le Trapèſe n'ayant point ſes dimenſions uniformes, ne ſçauroit être meſuré par lui-même; il faut le réduire au Triangle qui, comme nous l'avons déjà obſervé, ſe rapporte lui-même au parallélogramme.

Avant que d'en venir à la meſure du parallélogramme, donnons l'art de le conſtruire dans tous les cas, & obſervons quelques-unes de ſes propriétés.

## PROBLÊME LXVIII.

159. Conſtruire un Rectangle (*fig. 10.*), dont deux côtés AB, BD contigus (*a*) ſont donnés.

## RÉSOLUTION.

Sur la ligne AB, élevez perpendiculairement BD: enſuite du point D avec la ligne AB, décrivez un arc; & du point A avec la ligne BD, tracez-en un autre qui coupe le premier au point C. Tirez AC & CD; vous aurez le Rectangle ABDC, dont les côtés AB, BD ſont donnés.

## DÉMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que les côtés oppoſés de cette figure ſont parallèles, & que tous les angles ſont droits.

Conſidérons les deux triangles ABD, ACD; tous les côtés de l'un ſont égaux à tous les côtés de l'autre, chacun à chacun: ainſi les angles oppoſés à des côtés égaux ſont égaux: par conſéquent l'angle B étant droit, l'angle C l'eſt auſſi; de même

(*a*) *Contigus* c.-à-d. dont la rencontre mutuelle forme un angle.

l'angle CDA = l'angle DAB : or deux lignes également inclinées sur une troisième sont parallèles (n°. 55.) ; donc AB est parallèle à CD. AB est perpendiculaire sur BD ; CD l'est donc aussi ; & par conséquent l'angle CDB est un angle droit. Mais comme l'angle CAD est encore égal à l'angle ADB, à cause que ces deux angles sont opposés aux côtés égaux AB, CD, il s'ensuit que CA est parallèle à DB (n°. 55.), laquelle étant perpendiculaire sur AB, il est nécessaire que CA le soit aussi (n°. 56.) ; ainsi l'angle CAB est droit, d'où il suit que la figure ABCD est un rectangle, puisqu'elle a ses côtés opposés parallèles, & tous ses angles droits.

## PROBLÊME LXIX.

160. Construire un Rhomboïde, ou un Parallélogramme oblique plus long que large (*fig. 11.*), dont deux des côtés AB, BD sont donnés, avec l'angle ABD compris entre ces côtés.

## RÉSOLUTION.

Faites l'angle OMG = l'angle ABD ; soit MG = AB & MO = BD : du point G avec MO, décrivez un arc ; & du point O avec GM, décrivez-en un autre qui coupe le premier au point S ; tirez les lignes OS, GS : le Rhomboïde OMGS sera tel qu'on le demande ; ce qui se démontre, comme ci-devant, en tirant la diagonale MS.

## PROBLÊME LXX.

161. Construire un Rhombe, ou un Losange (*fig. 12.*) avec la ligne AB & l'angle ABC.

## RÉSOLUTION.

On sçait que tous les côtés du Losange doivent être égaux, & ses angles obliques.

Sur la ligne C D = A B, faites l'angle F C D égal à l'angle A B C ; que le côté C F = C D, & des points D, F, avec la ligne C D, décrivez des arcs qui ſe coupent en G : la figure C D G F ſera un Loſange qui aura les conditions données. Sa conſtruction eſt aſſez claire.

*Préparation à la meſure du Rectangle.*

162. De même qu'il a fallu convenir d'une certaine longueur, qui ſervît de meſure commune à toutes les longueurs que l'on auroit à meſurer ; il a été beſoin auſſi de déterminer une ſurface, à laquelle on dût rapporter toutes les ſurfaces que l'on voudroit évaluer, & ce modèle d'évaluation a dû être le plus ſimple qu'il étoit poſſible. La figure quarrée a toute la ſimplicité que l'on peut déſirer : les angles droits étant invariables, un ſeul côté ſuffit à la détermination du quarré ; c'eſt donc avec raiſon qu'on l'a choiſi pour être le modèle d'évaluation de toutes les ſurfaces, c'eſt-à-dire, qu'une ſurface ſera jugée plus ou moins grande, à proportion qu'elle contiendra plus ou moins de fois le modèle qui ſervira à l'eſtimer.

163. Nous avons employé les toiſes, les pieds, les pouces, les lignes, les points à la meſure des longueurs : nous nous en ſervirons encore à l'évaluation des ſurfaces ; mais alors on doit entendre des toiſes quarrées, des pieds quarrés, &c. Une toiſe quarrée eſt une ſurface quarrée, qui a une toiſe en long & une toiſe en large. Le pied quarré eſt auſſi une ſurface longue d'un pied & large d'autant ; entendez la même choſe du pouce quarré, de la ligne quarrée, & du point quarré. Les Arpenteurs ou les Artiſans appellent *des toiſes courantes*, *des pieds courans*, &c., les toiſes ou les pieds avec leſquels on meſure les longueurs, pour

les distinguer des toises quarrées ou des pieds quarrés qui servent à mesurer les surfaces.

164. Quand il faut mesurer une étendue considérable de terrein, en l'évaluant en toises, le nombre qui en exprime la valeur, devient si grand, qu'il apporte de l'embarras dans le calcul : c'est pourquoi on a établi des mesures plus grandes que la toise. Les plus ordinaires ou les plus généralement connues sont la *perche* & l'*arpent*. La perche varie suivant les différentes Coutumes ; c'est à celui qui va faire des Arpentages dans un pays, d'en prendre connoissance chez le Juge du lieu : à Paris la perche contient trois toises, ou dix-huit pieds ; pour les travaux Royaux, elle a vingt-deux pieds. Ainsi la perche quarrée, mesure de Paris, est un quarré qui a trois toises de long sur trois toises de large. L'arpent contient cent perches quarrées, c'est-à-dire, en le considérant comme un quarré, qu'il contient dix perches de longueur sur dix perches de largeur ; ainsi que nous allons le démontrer par le Problême suivant.

## PROBLÊME LXXI.

165. Déterminer la surface d'un rectangle qui a huit toises de long sur cinq toises de large (*fig. 13.*).

## RÉSOLUTION.

Multipliez la longueur 8 par la largeur 5 : le produit 40 indiquera que le Rectangle ABCD contient 40 toises quarrées.

## DÉMONSTRATION.

Divisez le côté AB en huit parties égales, qui représenteront les huit toises en longueur que contient le Rectangle. Divisez aussi en cinq parties égales sa largeur AD. Par les points de division de la

longueur AB, tirez des parallèles à la ligne AD; & par chaque point de diviſion de la largeur AD, menez des parallèles à la longueur AB : il eſt évident que ces lignes par leur mutuelle interſection donneront des toiſes quarrées, puiſque (conſt.) chaque petite ſurface AOSX eſt auſſi longue que large, AO & AX repréſentant chacune une toiſe, & l'angle A qu'elles forment étant droit, par la ſuppoſition; mais la bande ABMX contient huit petits quarrés; il y a cinq bandes égales à celle-ci; on a par conſéquent 5 fois 8 = 40 petits quarrés qui repréſentent 40 toiſes quarrées. Pour déterminer la valeur d'un Rectangle, il ſuffit donc de multiplier ſa longueur par ſa largeur. C. Q. F. D. (*a*).

166. Puiſque l'on évalue en toiſes quarrées la ſurface d'un Rectangle qui a 8 toiſes de baſe ſur 5 de hauteur, en multipliant 8 par 5, il s'enſuit que l'on trouvera auſſi la valeur d'une toiſe quarrée en pieds quarrés, en multipliant ſa longueur 6 par ſa largeur 6 = 36 pieds quarrés, c'eſt-à-dire, 36 petites ſurfaces qui ont chacune un pied de long ſur un pied de large. Par la même raiſon un pied quarré = 144 pouces quarrés; car un pied quarré a 12 pouces de longueur ſur 12 pouces de largeur: or 12 fois 12 = 144; par conſéquent la toiſe

(*a*) Il ſera facile de faire remarquer aux Commençans, que la plus grande partie de nos appartemens ſont des Rectangles. En général les Ouvrages de l'Art ſont des figures régulières ou ſymétriques, parce qu'elles ſont plus agréables, plus commodes, & même plus économiques. L'ame embraſſe d'une ſeule vue une conſtruction ſymétrique, elle ſe la rappelle avec facilité; l'eſprit n'a point à travailler, il n'a, pour ainſi dire, qu'à jouir. Voilà la ſource de l'agrément.

La commodité eſt une ſuite de la régularité ou de la ſymétrie; une forme ſymétrique étant déterminée, il eſt plus aiſé de s'arranger que de changer à chaque inſtant de diſpoſition, comme on y eſt forcé dans les emplacemens biſarres.

Entre les formes régulières ou ſymétriques, le Rectangle a dû avoir la préférence, parce que le corps de l'homme fait naturellement un angle droit, lorſqu'il ſe tient débout; c'eſt l'aſſiette la plus ſolide, ainſi que nous l'avons obſervé dans un autre endroit.

quarrée contient 36 fois 144 pouces quarrés = 5184 pouces quarrés. Le pouce quarré ayant auſſi 12 lignes de long ſur 12 lignes de large, vaudra 144 lignes quarrées ; & ſi l'on diviſe la ligne courante en 12 parties que l'on appelle *points*, la ligne quarrée contiendra 144 points quarrés. En calculant toujours ſur le même principe, la perche quarrée (meſure de Paris) = 9 toiſes quarrées, puiſqu'elle contient 3 toiſes de long ſur 3 toiſes de large ; enfin l'arpent ayant 10 perches en longueur & 10 perches en largeur, doit valoir 100 perches quarrées : car 10 fois 10 = 100 ; ce que nous avions promis de démontrer ſur la fin du n°. 164.

Afin que ces meſures ſe trouvent plus facilement au beſoin, nous allons en faire une Table méthodique.

*TABLE des meſures les plus uſitées dont on ſe ſert dans l'Arpentage, ou la meſure des Terreins.*

| | | |
|---|---|---|
| L'arpent vaut | 100 | perches quarrées, ou |
| | 900 | toiſes quarrées. |
| La perche courante | 3 | toiſes courantes, ou |
| | 18 | pieds. |
| La perche quarrée | 9 | toiſes quarrées, ou |
| | 324 | pieds quarrés. |
| La toiſe courante | 6 | pieds courans, ou |
| | 72 | pouces. |
| La toiſe quarrée | 36 | pieds quarrés. |
| Le pied courant | 12 | pouces courans. |
| Le pied quarré | 144 | pouces quarrés. |
| Le pouce courant | 12 | lignes courantes. |
| Le pouce quarré | 144 | lignes quarrées. |
| La ligne courante | 12 | points courans. |
| La ligne quarré | 144 | points quarrés. |

167. Les Géomètres appellent ordinairement la

longueur d'un Rectangle *ſa baſe*, & *hauteur* ce que nous avons nommé largeur; de ſorte que chez eux, multiplier la baſe par la hauteur, eſt la même choſe que multiplier la longueur par la largeur. En général on prend pour baſe d'un parallélogramme ou d'un Triangle, le côté ſur lequel on abaiſſe une perpendiculaire de l'angle oppoſé.

## PROBLÊME LXXII.

168. Meſurer la ſurface du Triangle rectangle ABC (*fig. 14.*), dont la baſe = 7 pieds & la hauteur, 3.

## RÉSOLUTION.

On ſçait qu'un Triangle rectangle eſt celui qui a un angle droit

Multipliez la baſe BC par la hauteur AB, c'eſt-à-dire, 7 par 3 = 21; & prenez la moitié de ce produit = $10\frac{1}{2}$: cette moitié eſt la valeur en toiſes quarrées du Triangle rectangle ABC.

## DÉMONSTRATION.

Par le point C tirez CD, égale & parallèle à BA, & menez AD: on aura alors le Rectangle ABCD, dont le Triangle ABC eſt la moitié; mais pour avoir la valeur du Rectangle ABCD, il faut multiplier la baſe 7 par ſa hauteur 3, & prendre le produit 21 tout entier (n°. 165.); on aura donc la meſure de la moitié de ce Rectangle, c'eſt-à-dire, la meſure du Triangle ABC, en prenant la moitié du produit 21 = $10\frac{1}{2}$; C. Q. F. D.

169. Si toutes les figures irrégulières pouvoient ſe diviſer en Triangles rectangles, toute la théorie de la meſure des terreins ſe trouveroit renfermée dans les problêmes 71, 72. Mais comme il eſt fort rare de trouver cet avantage, que les Triangles *meſu-*

*rables* ſont preſque tous acutangles ou obtuſangles; que par-là ils appartiennent à des parallélogrammes obliques dont ils ſont la moitié, comme on peut le voir par la figure 15, où le Triangle ABC obtuſangle en B eſt la moitié du parallélogramme oblique ABCD, les premiers Géomètres ſe mirent à rechercher les moyens de meſurer les parallélogrammes obliques (*a*), & cette découverte nous dévoiloit néceſſairement tout ce qui reſtoit à ſçavoir ſur la meſure des ſurfaces planes terminées par des lignes droites. En cas que le parallélogramme oblique eût quelque rapport au Rectangle, & que l'on pût déterminer ce rapport, la meſure du Rectangle étant au monde ce qu'il y a de plus ſimple, on avoit, avec toute l'élégance poſſible, tout ce que l'on pouvoit déſirer ſur cette matiere. Or c'eſt ce qui a été découvert; on a trouvé qu'un parallélogramme oblique étoit parfaitement égal à un Rectangle de même baſe & de même hauteur que l'oblique. Démontrons cette vérité ſi belle, parce qu'elle eſt ſi utile. On ſe rappellera que la hauteur d'un point au-deſſus d'une ligne & d'un objet au-deſſus d'un plan, s'eſtime néceſſairement par la perpendiculaire qui tombe ſur la ligne au-deſſus de laquelle ce point s'élève; par exemple, que la hauteur du point D (*fig. 16.*) au-deſſus de la ligne AB, n'eſt pas la ligne DA, mais la perpendiculaire DM, qui eſt le plus court chemin du point D à la ligne AB. Il faut auſſi faire attention qu'être ſitué entre mêmes parallèles, ſignifie préciſément la même choſe qu'être de même hau-

(*a*) Le Parallélogramme oblique ne ſçauroit être pris pour ſervir de meſure commune à toutes les ſurfaces, parce qu'une toiſe en Loſange ne ſeroit pas une figure déterminée; elle auroit plus ou moins de ſurface, à proportion que ſes angles obtus ſeroient plus ou moins ouverts. Enſorte qu'on pourroit la réduire preſqu'à rien, en rendant ſes angles extraordinairement obtus; au contraire la toiſe quarrée, en gardant toujours la longueur de ſes côtés, ne ſçauroit avoir ni plus ni moins de ſurface qu'elle en a.

teur, parce que les parallèles gardent toujours entr'elles une égale distance ; mais l'inverse de cette proposition est fausse : car on peut être de même hauteur sans être situé entre mêmes parallèles.

## PROPOSITION XV.

170. Le parallélogramme oblique A B C D (*fig. 16.*) est égal en surface à un parallélogramme rectangle de même base & de même hauteur ; c'est-à-dire, dont la base est égale à la base de l'oblique, & la hauteur égale à la hauteur de l'oblique.

## DÉMONSTRATION.

Abaissez la perpendiculaire D M sur A B, & la perpendiculaire C O sur le prolongement B O. Ces perpendiculaires sont égales, étant entre mêmes parallèles ; & elles forment le Rectangle DMOC, dont la base MO = DC = AB, base du parallélogramme oblique. Ainsi les deux parallélogrammes ABCD, DMOC, ont même base & même hauteur ; or il est évident que ces deux parallélogrammes sont égaux ; car ils sont composés chacun de deux surfaces égales, chacune à chacune. Le Rectangle DMOC contient le Triangle C B O, & le Trapèse D M B C ; de même le parallélogramme oblique A B C D contient le Trapèse DMBC, & le Triangle DAM égal au Triangle CBO, à cause que tous leurs côtés sont visiblement égaux, chacun à chacun : car ( par la const. ) BC = AD, CO = DM. Il reste donc à démontrer que BO = AM. Remarquez que MB + BO = DC. Or D C = A M + M B ; parce que ( n°. 153. ) les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux. Ainsi MB + BO = AM + MB ; & ôtant MB de part & d'autre, on a BO = AM ; donc le Triangle D A M est égal au Triangle C B O ;

(n°. 151.) par conſéquent le parallélogramme oblique ABCD eſt égal au Rectangle DMOC, qui a même baſe & même hauteur; C. Q. F. D.

Cette Démonſtration me paroît beaucoup plus ſimple que celle des Anciens, que l'on trouve dans tous les Livres des Modernes. Néanmoins on peut encore la reſſerrer.

*Démonſtration plus conciſe.*

La perpendiculaire DM retranche le Triangle DMA; mais l'autre perpendiculaire CO ajoute le Triangle CBO = DMA; on regagne donc d'un côté ce que l'on perd de l'autre, & par conſéquent l'égalité ſubſiſte (*a*).

La converſe de cette Propoſition eſt fauſſe. Nous prouverons un peu plus bas (n°. 175.) qu'il eſt faux que des parallélogrammes égaux en ſurface, aient néceſſairement même baſe & même hauteur.

## PROPOSITION XVI.

171. Deux parallélogrammes obliques (*fig.* 17.) qui ont des baſes & des hauteurs égales, ſont néceſſairement égaux en ſurface, quoiqu'ils ſoient différemment inclinés.

## DÉMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que le parallélogramme oblique DABC eſt égal en ſurface au parallélogramme oblique MGPX, dont la baſe & la hauteur ſont égales à la baſe & à la hauteur du parallélogramme DABC, qui eſt moins incliné.

(*a*) Ces ſortes de démonſtrations, qui montrent d'un coup d'œil l'eſprit de la choſe, m'ont toujours réuſſi auprès des jeunes gens; je conſeille que l'on en faſſe uſage; elles ont un air familier qui prévient. On ſe fait très-bien entendre dans une converſation, quoique les Démonſtrations ne ſoient pas auſſi régulières que dans un Livre.

Abaiſſez

Abaiſſez les perpendiculaires DO, CS, XN, PH. Par la Propoſition précédente (n°. 170.), le parallélogramme oblique DABC = le Rectangle DOSC de même baſe & de même hauteur. Par la même raiſon, le parallélogramme oblique XMGP = le Rectangle XNHP. Mais le rectangle DOSC = le Rectangle XNHP, puiſque tous les angles & tous les cotés de l'un ſont égaux à tous les angles & à tous les côtés de l'autre, chacun à chacun (conſt); par conſéquent les deux parallélogrammes DABC, XMGP, différemment inclinés, mais qui ont même baſe & même hauteur, ſont auſſi égaux en ſurface; C. Q. F. D.

## PROPOSITION XVII.

172. Les triangles ABC, MDH, dont les baſes BC, DH, ſont égales, & qui ont même hauteur, ont des ſurfaces égales (*fig. 18*).

## DÉMONSTRATION.

Par le point C menez CS, parallèle & égale à BA, & tirez AS. Faites pareillement HG parallèle & égale à DM; tirez encore MG. Il eſt clair (n°. 171.) que les deux parallélogrammes ABCS, DHGM, de même baſe & de même hauteur, ſont égaux. Or les triangles ABC, MDH ſont moitiés de ces parallélogrammes égaux (n°. 154.); ces deux Triangles ſont donc égaux en ſurface; C. Q. F. D.

La converſe de cette Propoſition eſt fauſſe; ce que je démontrerai dans la ſuite (n°. 177.).

173. Il n'eſt pas poſſible de porter plus loin l'art de meſurer les Terreins. L'irrégularité la plus ſingulière ou la plus recherchée, peut à la vérité multiplier le travail des mains; mais elle ſera toujours ſoumiſe à la méthode de meſurer les ſurfaces les plus ſimples & les plus uniformes.

tre parallélogramme, dont la baſe ſeroit 6 toiſes & la hauteur 4, auroit auſſi en ſurface 24 toiſes quarrées : des parallélogrammes peuvent donc avoir des ſurfaces égales, ſans être de même baſe ni de même hauteur ; C. Q. F. D.

## *REMARQUE.*

176. On obſervera qu'il eſt beaucoup plus expéditif dans la pratique d'abaiſſer la perpendiculaire DM de l'angle obtus D, afin qu'elle tombe au dedans du parallélogramme, s'il n'y a point d'obſtacle, que de la faire tomber de l'angle aigu C ; parce qu'elle tomberoit alors au dehors du parallélogramme, ce qui exigeroit que l'on prolongeât la baſe AB juſqu'à la rencontre O de la perpendiculaire CO. Cette remarque eſt encore plus eſſentielle quand on opère ſur un Triangle : car on ne peut alors abaiſſer de perpendiculaire que du point D, au lieu que de quelque point du côté DC que l'on abaiſſe une perpendiculaire ſur la baſe AB, elle ſera toujours égale à DM.

## PROBLÊME LXXIV.

177. Déterminer l'*aire* ou la ſurface du Triangle oblique ABC (*fig.* 19).

## RÉSOLUTION.

De l'angle obtus B, ſi vous le pouvez, abaiſſez la perpendiculaire BD, en vous ſervant de l'équerre d'Arpenteur ; & meſurez cette perpendiculaire qui contient, par exemple : 12 toiſes 1 pied 5 pouces. Meſurez auſſi la baſe AC, où vous pourrez trouver 24 toiſes 8 pouces. Réduiſez en pouces ces deux dimenſions. Commençons par la perpendiculaire BD = 12 toiſes 1 pied 5 pouces. On ſçait qu'une toiſe = 72 pouces ; ainſi 12 toiſes = 12

fois 72 = 864 pouces, auxquels ajoutant 1 pied 5 pouces = 17 pouces, on aura 881 pouces pour la perpendiculaire B D.

Réduiſons auſſi en pouces la baſe AC = 24 toiſes 8 pouces, en multipliant 24 par 72 = 1728 pouces; ajoutez-y 8 pouces, la baſe ſera 1736 pouces. Il faudroit préſentement multiplier la baſe 1736 par la perpendiculaire 881, & prendre la moitié de ce produit, qui ſeroit la valeur en pouces quarrés du Triangle propoſé; mais il eſt plus court de multiplier la moitié de la baſe 1736 = 868 par 881 = 764708 pouces quarrés, qui eſt la valeur du Triangle propoſé : vous réduirez en toiſes quarrées les 764708 pouces quarrés en diviſant 764708 par 5184, parce que la toiſe quarrée contient 5184 pouces quarrés; ce qui ſe connoît en multipliant 72 pouces par 72 pouces. Diviſant donc 764708 par 5184, on doit trouver 147 toiſes quarrées, & 2660 pouces quarrés, leſquels réduits en pieds quarés, donneront 18 pieds quarrés & 68 pouces quarrés; ce que l'on trouvera en diviſant 2660 par 144, à cauſe que le pied quarré = 12 fois 12 = 144 pouces quarrés. La valeur du Triangle ABC eſt donc 147 toiſes 18 pieds 68 pouces quarrés.

Si l'on veut avoir cette valeur en perches quarrées, comme la perche quarrée = 9 toiſes quarrées, on diviſera 147 par 9, ce qui donnera 16 perches & 3 toiſes quarrées; de ſorte que la ſurface du Triangle ABC contiendra 16 perches 3 toiſes 18 pieds 68 pouces quarrés.

## DÉMONSTRATION.

On doit prouver que l'on a la ſurface ou l'aire d'un Triangle oblique, en multipliant ſa hauteur perpendiculaire par la moitié de ſa baſe.

On peut ſe rappeler qu'il a été démontré (n°. 172.)

qu'un Triangle oblique eſt la moitié du parallélogramme oblique de même baſe & de même hauteur ; que ce parallélogramme oblique eſt égal à un Rectangle de même baſe & de même hauteur ; par conſéquent un Triangle oblique eſt auſſi la moitié d'un Rectangle de même baſe & de même hauteur : or, pour avoir la valeur d'un rectangle, il faut multiplier ſa baſe par ſa hauteur ; donc pour avoir la valeur du Triangle qui eſt ſa moitié, on ne doit multiplier la hauteur que par la moitié de la baſe ; mais c'eſt ce que nous avons fait. Il eſt donc clair que nous devons avoir la ſurface du Triangle propoſé ; C. Q. F. D.

Par la réſolution de ce problême il eſt facile de prouver la fauſſeté de la converſe de la Propoſition 17 (n° 172,) ; je veux dire, que des Triangles qui ont des ſurfaces égales, n'ont pas néceſſairement même baſe & même hauteur ; car un Triangle qui auroit 10 toiſes de baſe ſur 4 de hauteur, auroit en ſurface 20 toiſes quarrées ; mais un autre Triangle dont la baſe contiendroit 8 toiſes & la hauteur 5, auroit auſſi en ſurface 20 toiſes quarrées ; par conſéquent des Triangles peuvent avoir des ſurfaces égales, ſans être de même baſe ni de même hauteur.

On voit auſſi par cet éxemple que la converſe de la Propoſition 14 (n°. 151.) eſt fauſſe, c'eſt-à-dire, qu'il n'eſt pas vrai que des Triangles égaux en ſurface aient néceſſairement tous leurs côtés égaux, chacun à chacun (*a*).

(*a*) Nous ne devons pas aller plus loin ſans tenir la parole que nous avons donnée n°. 67. Nous avons promis de dire pourquoi certaines Propoſitions ont des converſes, pourquoi d'autres n'en ont pas, &c.

Afin qu'une Propoſition puiſſe être convertie, il eſt néceſſaire que cette Propoſition ait deux parties, dont l'une ſoit la conſéquence de l'autre, ou tout au moins ſoit regardée comme telle. Par éxemple, *ſi l'on tire une diagonale OS dans un parallélogramme AODS*, (fig. 20.) *ce parallélogramme ſera diviſé en deux parties égales.* Il eſt évident que cette Propoſition a deux parties. La première, où l'on ſuppoſe que

## *REMARQUE.*

178. On observera que l'on pouvoit multiplier la hauteur par la base toute entière ; mais on n'auroit pris alors que la moitié du produit, ce qui auroit donné le même résultat : ou bien multiplier la base entière par la moitié de la hauteur, ce qui revient au même que de multiplier la hauteur par la moitié de la base ; mais on doit éviter de prendre la moitié d'un nombre impair, afin de ne pas tomber dans les fractions, dont le calcul est toujours plus embarrassant que celui des nombres entiers : c'est pourquoi si la base & la hauteur du Triangle étoient exprimées par des nombres impairs, on multiplieroit la base par la hauteur, & la moitié de ce produit exprimeroit la véritable valeur du Triangle.

*l'on tire une diagonale dans un parallélogramme ;* & la seconde, que l'on regarde comme une suite de la première, c'est que *ce parallélogramme sera divisé en deux parties égales.* Ainsi pour avoir la converse de cette Proposition, mettons en supposition la seconde partie. Supposons qu'*un parallélogramme soit divisé en deux parties égales ;* si l'on vouloit en déduire que ce *parallélogramme ne peut être ainsi divisé que par une diagonale*, ce seroit la converse de la première Proposition ; mais cette converse seroit très-fausse, parce qu'un parallélogramme peut être divisé en deux parties égales par la ligne MN tirée par le milieu des côtés AS, OD, & cette ligne MN n'est pas une diagonale. Les Géomètres appellent la première partie d'une Proposition l'*hypothèse*, c'est-à-dire, les suppositions ou les données, d'où l'on déduit ce que l'on se propose d'établir ; car il n'est pas possible de démontrer quelque chose à ceux qui n'accordent rien ; & ils nomment *conséquence* ce qui est déduit de l'hypothèse.

On a donc un caractère pour reconnoître la vérité ou la fausseté d'une Proposition converse. Si la conséquence redonne nécessairement l'hypothèse, la converse est vraie ; mais elle est fausse, lorsque l'hypothèse n'est pas une suite nécessaire de la conséquence.

On ne sçauroit convertir une Proposition, dont la conséquence dit précisément la même chose que l'hypothèse. Ainsi cette Proposition ; *si l'on a un Triangle, ses trois angles sont nécessairement égaux à deux angles droits*, est une Proposition qui n'a point de converse ; vous ne pouvez pas dire, *si les trois angles d'un Triangle sont égaux à deux angles droits, on aura nécessairement un triangle ;* cela ne signifieroit rien ; aussi ces sortes de Propositions doivent s'exprimer sans aucune condition ; *les trois angles d'un triangle sont égaux à deux angles droits ;* où l'on voit qu'il n'y a point de converse à faire.

179. Il peut se rencontrer quelque obstacle qui empêche que l'on n'abaisse une perpendiculaire de l'angle obtus B (*fig.* 21.) sur la base AC. En ce cas on prolongera l'un des deux autres côtés CB, jusqu'à ce que de l'angle opposé A, on puisse abaisser la perpendiculaire AD sur le prolongement BD. Après quoi l'on mesurera BC, qui devient alors la base du Triangle, & AD qui en exprime la hauteur : on multipliera, comme ci-devant, BC par AD. La moitié de ce produit sera la valeur du Triangle ABC.

## PROBLÊME LXXV.

180. Evaluer la surface d'un Trapése ABCD, c'est-à-dire d'une figure de quatre côtés, dont on en suppose deux tels que AD, BC parallèles (*fig.* 22).

## RÉSOLUTION.

De l'angle D abaissez la perpendiculaire DM sur l'un des côtés BC parallèles, ou, s'il y a de l'obstacle, de l'angle C faites tomber la perpendiculaire CS sur le prolongement DS de l'autre côté AD parallèle. Cette perpendiculaire CS = DM, à cause de AD parallèle à BC (supp.); mesurez donc DM ou CS que vous trouverez, par exemple, de 4 perches. Mesurez aussi les côtés parallèles AD, BC. Supposons AD = 3 perches 2 toises, & BC = 6 perches 1 toise. Prenez la somme des deux côtés parallèles AD, BC = 10 perches. Multipliez 10 perches par 4 valeur de la perpendiculaire ; vous aurez 40 perches quarrées, dont la moitié = 20 sera la valeur du Trapèse ABCD.

## DÉMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que l'on a la surface du Trapèse ABCD, en prenant la moitié du produit de

la somme des deux côtés parallèles AD, BC, par la perpendiculaire DM qui exprime la distance d'un côté à l'autre.

Tirez la diagonale BD : le Trapèse ABCD est alors divisé en deux Triangles ABD, DBC, qui ont même hauteur DM. Or la valeur du Triangle DBC (n°. 177.) est la moitié du produit de la base BC par la hauteur DM; par la même raison la valeur du Triangle BAD se trouve, en prenant la moitié du produit AD par la perpendiculaire DM. Par conséquent on a la valeur de tout le Trapèse, en prenant la moitié du produit des deux bases BC, AD, par la perpendiculaire DM, qui exprime la distance d'une base à l'autre.

## *REMARQUE.*

181. Au lieu de multiplier la somme des deux côtés parallèles par la perpendiculaire DM, & prendre ensuite la moitié de ce produit, on auroit pu multiplier seulement ces deux côtés par la moitié de la perpendiculaire, ou la perpendiculaire toute entière par la moitié de la somme de ces deux côtés, & en ce cas le produit tout entier auroit été la valeur du Trapèse; mais on seroit tombé dans les fractions; ce que l'on doit toujours éviter.

La résolution des Problèmes précédens suffit pour faire comprendre, comment l'on peut trouver l'aire des surfaces planes terminées par des lignes droites, de quelque nombre de côtés qu'elles puissent être : qu'elles soient régulières ou irrégulières, cela n'y fait rien; on pourra toujours les réduire en Rectangles, en Trapèses, en Triangles : on ne les divisera même, si l'on veut, qu'en Triangles; mais il est souvent plus commode d'y tracer des Rectangles & des Trapèses : c'est la figure du Terrein qui détermine ces sortes d'opérations, comme on va le voir dans les Problèmes suivans.

## PROBLÊME LXXVI.

182. Mesurer le Quadrilatère ABCD, dont un des angles A est droit (*fig.* 23).

## RÉSOLUTION.

On pourroit tirer une ligne de l'angle D au point B. Elle diviseroit le Quadrilatère en deux Triangles, dont on chercheroit séparément la valeur : ces deux valeurs réunies donneroient celle du Quadrilatère ; mais en s'y prenant d'une autre façon, on pourra avoir plus commodément la surface ou l'aire du Quadrilatère ABCD. De l'angle C abaissez la perpendiculaire CG sur le côté AB ; mesurez cette perpendiculaire : faites AM=CG ; on aura MC=AG. Par-là vous réduisez le Quadrilatère ABCD en deux Triangles rectangles CGB, CMD, & au Rectangle CGAM, dont il est très-facile d'avoir la valeur : car la surface du Triangle $CGB=\frac{CG\times GB}{2}$ ; celle du Rectangle CGAM= CG×GA, ou CG×CM ; enfin celle du Triangle $CMD=\frac{CM\times MD}{2}$ : ajoutant ces trois produits ensemble, leur somme donnera la valeur du Quadrilatère ABCD. Cela n'a pas besoin de démonstration.

## PROBLÊME LXXVII.

183. Trouver la surface de l'Eptagone irrégulier ABCDEFG, qui peut servir de modèle pour toutes les figures irrégulieres (*fig.* 24).

## RÉSOLUTION.

De l'angle A à l'angle E le plus éloigné, tracez la ligne AE : sur cette ligne abaissez les perpendi-

culaires GO, FR, DP, CS, BO; vous aurez quatre Triangles rectangles & trois Trapèſes, dont les meſures réunies (n°. 166. & 180.) donneront celle de l'Eptagone irrégulier ; ce qui eſt évident.

Ou, ſi vous l'aimez mieux, de l'angle C aux angles A, G, F, E, tirez les lignes CA, CG, CF, CE; ces lignes diviſeront l'Eptagone en cinq Triangles que vous meſurerez ſéparément. Vous ferez une adition de la valeur de ces cinq Triangles; leur ſomme donnera l'aire de l'Eptagone propoſé.

Cette derniere opération ſera moins expéditive que la premiere, parce que dans le premier cas les baſes de tous les Triangles & de tous les Trapèſes ſe trouvent ſur la même ligne AE, au lieu que dans la dernière figure toutes les baſes pourront être différentes lignes : ce qui multipliera les embarras.

## PROBLÊME LXXVIII.

184. Trouver la ſurface d'une pièce de terre ABCD (*fig.* 25.), bornée par la Rivière RR, dont la rive n'eſt pas en ligne droite.

## RÉSOLUTION.

Diviſez la rive où aboutit la pièce de terre en pluſieurs parties qui ſoient ſenſiblement droites, comme AO, OS, SM, &c. Des points C, B, imaginez les lignes CM, CN, CT, BO, BS, BM: ces lignes diviſeront la pièce de terre en Triangles, qui différeront très-peu de Triangles rectilignes; meſurez donc ces Triangles à l'ordinaire, pour avoir dans leur ſomme la valeur du terrein ABCD.

## PROBLÊME LXXIX.

185. Meſurer la ſurface d'un Polygone régulier ABCDEF (*fig.* 26.), par exemple, d'un Salon éxagone, ou de tout autre Polygone régulier.

## RÉSOLUTION,

Elle eſt beaucoup plus facile que les précédentes. Du centre O abaiſſez ſur un des côtés AB la perpendiculaire OS; meſurez cette perpendiculaire, auſſi-bien que le côté AB, ſur lequel elle tombe; multipliez OS par AB; prenez la moitié de ce produit, que vous multiplierez encore par le nombre des côtés du Polygone, c'eſt-à-dire, ici par *6* : ce dernier produit ſera la valeur du Polygone propoſé.

## DÉMONSTRATION.

Tirez les lignes OA, OB, OC, &c. il y aura autant de triangles égaux que le Polygone a de côtés; par conſéquent la ſurface de ce Polygone ſera égale à celle du Triangle AOB, pris autant de fois qu'il y a de côtés : or c'eſt ce que nous avons fait, en multipliant par *6* la moitié du produit de AB par OS, valeur du Triangle AOB; C. Q. F. D.

## PROBLÊME LXXX.

Changer une figure, telle que le Triangle BAC (*fig.* 27.), en une autre figure qui ait un nombre quelconque de côtés, ſans avoir néanmoins plus de ſurface que le triangle ABC.

## RÉSOLUTION.

Afin de ſimplifier la réſolution de ce Problême, propoſons-nous ſeulement de changer le Triangle ABC en une figure qui ait un côté de plus, c'eſt-à-dire, en une figure de quatre côtés.

D'un angle A quelconque de ce Triangle, tirez au côté oppoſé BC une ligne quelconque AD. Par un des deux autres angles B, tirez une ligne indéfinie BS parallèle à la ligne AD; & du point A

tirez une ligne AP, qui coupe la parallele indéfinie BS en un point quelconque P. Enfin de ce point P au point D tirez la ligne PD; elle donnera une figure ACDP de quatre côtés, qui n'aura pas plus de ſurface que le triangle ACB.

## DÉMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que la figure ACDP a préciſément la même ſurface que le Triangle ACB. Remarquez d'abord que ces deux figures ont une partie commune ACDO. Reſte donc à démontrer que l'autre partie AOP, eſt égale à l'autre partie BOD. Conſidérez donc les deux Triangles PAD, BAD, de même baſe AD, & qui ſont entre les mêmes parallèles BP, DA (par la conſtruction): ces deux Triangles ont donc même baſe & même hauteur; ils ſont donc égaux en ſurface (n°. 172.); par conſéquent les deux parties de l'un priſes enſemble, ſont égales aux deux parties de l'autre auſſi priſes enſemble: mais ces deux Triangles ont de commun la partie DOA; c'eſt donc une néceſſité que la ſeconde partie BOD ſoit égale à la ſeconde partie AOP, & par conſéquent que la figure ACDP de quatre côtés ſoit égale en ſurface au Triangle BAC; C. Q. F. D.

La conſtruction de ce problême eſt d'autant plus facile, que l'on peut tirer à volonté les lignes AD, AP. Cependant, comme on préfere les terreins réguliers, ou approchans de la régularité à ceux qui ne le ſont pas, ſi l'on veut transformer le Triangle ABC en un parallélogramme (*fig. 28.*), de l'angle A tirez AD ſur le milieu de BC; & après avoir mené l'indéfinie BS parallèlement à AD, par le point A, vous menerez encore AP parallèle à BC. Tirez préſentement PD: vous aurez le parallélogramme CAPD égal en ſurface au Triangle BAC, ce qui n'a pas beſoin de démonſtration.

On ſe ſervira du même artifice pour transformer le parallélogramme ACDP (*fig. 29.*) en une figure de cinq côtés de même ſurface que ce parallélogramme, c'eſt-à-dire, que d'un angle A quelconque de ce parallélogramme, on menera AG en un point quelconque G, entre P & D; il faudra tirer enſuite l'indéfinie PS parallèlement à GA, & du point A mener une ligne quelconque AO, laquelle faiſant un angle quelconque avec le côté CA, coupe l'indéfinie PS en un point O. De ce point ſi l'on tire OG, la figure CDGOA aura cinq côtés, & n'aura pas plus de ſurface que le parallélogramme ACDP. La démonſtration eſt la même que ci-deſſus. En continuant ainſi de transformer une figure en une autre qui ait un côté de plus, on pourra toujours donner à une figure tel nombre de côtés que l'on voudra, ſans changer en rien la valeur de ſa ſurface : ainſi le Problême eſt réſolu généralement.

Par une opération contraire, vous réduirez une figure d'un nombre quelconque de côtés, en une autre qui en ait deux, trois, quatre, &c. de moins, pourvu qu'il ne ſoit pas queſtion de la réduire en une figure qui ait moins de trois côtés : car alors le Problême ſeroit impoſſible; j'en propoſerai ſeulement un exemple; ce Problême n'étant que le retour du précédent.

Soit donc la figure ABCDF (*fig. 30.*) de cinq côtés, qu'il s'agit de réduire en une figure qui n'en ait que trois, & qui ait pourtant la même ſurface que la figure de cinq.

Réduiſons-là d'abord à quatre côtés. Pour cela tirons AD, & par le point F menons-lui la parallèle indéfinie FS; prolongeons le côté BA juſqu'à ce qu'il coupe la parallèle FS en un point O. De ce point tirons la ligne OD : je dis que la figure

ODCB de quatre côtés, a la même ſurface que le pentagone irrégulier ABCDFA.

Car on voit, comme ci-deſſus, que ces deux figures ont la partie commune CDLAB, & qu'à cauſe des Triangles AOD, AFD, de même baſe & de même hauteur, la partie LFD eſt égale à la partie LOA; ainſi la figure de quatre côtés a préciſément la même ſurface que le pentagone irrégulier.

On réduira enſuite la figure de quatre côtés OBCD au Triangle SDC (*fig.* 31.) de même ſurface, comme on le voit par la conſtruction de la figure; & par conſéquent la figure ABCDF (*fig.* 30.) de cinq côtés, ſe trouvera réduite en une figure de trois (*fig.* 31.), qui aura préciſément la même ſurface; C. Q. F. T. & D.

## *REMARQUE.*

Tant que l'on peut ſe paſſer de contrats de vente, c'eſt toujours le mieux. On économiſe l'argent & le tems: c'eſt à quoi le problême du n°. 185 peut être fort utile. Par ſon moyen on pourroit faire l'échange de Terreins voiſins, ſans être obligé de vendre ou d'acheter; dans le cas, par éxemple, où l'on voudroit donner à l'emplacement d'un Château ou d'un jardin une autre figure plus régulière ou plus commode, que celle d'un Terrein propoſé.

186. Dans toutes les opérations précédentes, nous avons ſuppoſé que l'on pouvoit parcourir l'intérieur du terrein, dont on propoſoit de trouver la meſure: cependant il eſt un très-grand nombre de circonſtances où cela n'eſt pas poſſible; un baſſin rempli d'eau, une forêt, un lac, un marais impraticable, un terrein embarraſſé ou trop couvert, ne permettent pas que l'on trace des lignes au dedans de leur figure. Il faut les évaluer, ſi l'on peut, par la ſeule connoiſſance des côtés extérieurs qui les terminent;

pour cela il y a plusieurs moyens ; nous allons exposer ceux qui sont les plus faciles à comprendre, comme les plus propres à entretenir dans les jeunes gens le goût de cultiver leur raison.

Supposons donc qu'il s'agisse de mesurer le Triangle ABC (*fig.* 19.) obtusangle, c'est-à-dire, dont un des angles B est obtus ; qu'il ne soit pas possible de parcourir l'intérieur de ce Triangle, ni commode d'en prolonger les côtés AB, CB, afin d'abaisser des perpendiculaires sur le prolongement. On mesurera les trois côtés AB, BC, CA : mais cette connoissance ne suffit pas ; il faudroit encore avoir la valeur d'une perpendiculaire. Imaginons la perpendiculaire BD que l'on ne sçauroit parcourir : si nous pouvions la déterminer par la simple connoissance des trois côtés de ce Triangle, on en trouveroit la surface à l'ordinaire.

On s'apperçoit que la perpendiculaire BD divise le triangle obtusangle ABC en deux triangles rectangles ADB, BDC ; or les Géomètres ont découvert une propriété du triangle rectangle, qui nous servira à trouver la véritable longueur de la perpendiculaire BD, quoiqu'il ne soit pas possible de lui appliquer aucune mesure. Cette propriété va être énoncée dans la proposition suivante.

## PROPOSITION XVIII (*a*).

187. Soit le triangle ABC (*fig.* 32.) rectangle en B. On appelle *hypothénuse* le côté AC opposé

(*a*) On n'a mis ici cette Proposition, qu'en faveur de ceux qui n'auroient pas le dessein d'aller plus loin que les deux premiers Livres ; car sa véritable place, par rapport à tout l'ouvrage, est d'être la ving-tseptième dans l'ordre des Propositions, comme on le verra au Chapitre des lignes proportionnelles, n°. 293. où cette Proposition est démontrée beaucoup plus facilement ; c'est pourquoi la Proposition qui suivra celle-ci, est véritablement la dix-huitième ; elle doit se déduire immédiatement de la dix-septième, & non pas de celle dont il est ici question.

à

à l'angle droit B. Sur cette hypothénuſe faites le quarré AOSC. Faites auſſi des quarrés ſur les deux autres côtés AB, BC. On a trouvé que le quarré AOSC de l'hypothénuſe, eſt égal à la ſomme des quarrés ABMG, BCDF, conſtruits ſur les deux autres côtés AB, BC.

## DÉMONSTRATION.

De l'angle droit B, abbaiſſez ſur l'hypothénuſe AC la perpendiculaire BPR; elle diviſe le grand quarré en deux rectangles AORP, PRSC. Si l'on démontre que le petit rectangle AORP = le petit quarré ABMG, & que l'autre rectangle PRSC = l'autre quarré BCDF, on aura démontré que le grand quarré AOSC = les deux quarrés ABMG, BCDF.

Je dis donc premièrement, que le rectangle PRSC = le quarré BCDF. Tirez les lignes BS, AD, & remarquez que le triangle BCS a même baſe & même hauteur que le rectangle PRSC, puiſqu'en prenant CS pour baſe de l'un & de l'autre polygone, ils ont même hauteur, étant poſés entre les mêmes parallèles BR, CS. Ainſi le triangle BCS eſt la moitié du rectangle PRCS: car il a été démontré qu'un triangle eſt toujours la moitié d'un parallélogramme de même baſe & de même hauteur. Vous trouverez auſſi que le triangle ADC eſt la moitié du quarré BCDF; ces deux figures ont même baſe DC, & elles ſont entre les mêmes parallèles DC, FBA. Par conſéquent en démontrant que les deux triangles BCS, ADC ſont égaux, c'eſt une néceſſité que le rectangle PRSC & le quarré BCDF, qui ſont chacun doubles de ces triangles, ſoient auſſi égaux.

Mais (nº. 172.) des triangles qui ont des baſes & des hauteurs égales, ſont égaux en ſurface: or les

triangles ADC, BCS ont des baſes & des hauteurs égales ; car le triangle ADC, ayant DC pour baſe, aura pour hauteur BC=DC, à cauſe des parallèles DC, FA. De même le triangle BCS ayant pour baſe BC = DC, aura pour hauteur la perpendiculaire SM abbaiſſée ſur le prolongement CM. Or SM = BC ou CD. Pour en être convaincu, comparez le triangle SCM avec le triangle ABC : vous verrez qu'ils ont tous leurs côtés égaux, chacun à chacun : car CS = AC ; & en prolongeant le côté AC indéfiniment, on voit que l'angle OCM avec l'angle MCS vaut un angle droit : mais l'angle BCA avec l'angle BAC vaut auſſi un angle droit ; par conſéquent OCM + MCS = BCA + BAC. Mais l'angle OCM = BCA ſon oppoſé par le ſommet. Donc MCS = BAC ; & comme les triangles CMS, ABC ſont tous deux rectangles (ſupp.), il eſt clair que le troiſième angle MSC = le troiſième angle BCA (n°. 78.). Les deux triangles CBA, CMS ont donc un côté égal, & les angles ſur ce côté égaux, chacun à chacun ; par conſéquent les côtés oppoſés à des angles égaux ſont égaux (n°. 85.) : ainſi SM = BC.

Les deux triangles ADC, BSC ont donc même baſe & même hauteur ; il faut donc conclure qu'ils ſont égaux en ſurface (n°. 172.), & par conſéquent que le rectangle PRSC, & que le quarré BCDF, qui ſont chacun doubles de ces triangles égaux, ont auſſi des ſurfaces égales ; C. Q F. D. (*a*)

(*a*) Il eſt à propos que je prévienne un reproche que l'on me fera infailliblement. Vous pouviez, me dira-t-on, démontrer d'une manière beaucoup plus ſimple que le triangle ADC = le triangle BCS : d'autres l'ont exécuté. Ils ont fait voir que le triangle ADC a les deux côtés, DC, CA égaux aux deux côtés BC, CS du triangle BCS, chacun à chacun, & l'angle compris entre ces côtés égal de part & d'autre, puiſque l'angle DCA eſt compoſé d'un angle droit & de l'angle BCA, & que l'angle BCS eſt auſſi compoſé d'un angle droit

Secondement, on prouvera de la même manière que le petit rectangle APRO = le petit quarré ABMG (*fig.* 33.), en tirant les lignes CG, BO ; car on trouvera facilement, comme ci devant, que le triangle CAG = le triangle BOA : or le triangle CAG eſt la moitié du petit quarré ABMG ſitué ſur la même baſe AG, & entre les mêmes parallèles AG, MC. Et le triangle BOA eſt auſſi la moitié du rectangle APRO de même baſe AO, & entre les mêmes parallèles AO, BR ; par conſéquent les moitiés étant égales, les tous ſeront égaux, c'eſt-à-dire, que le rectangle APRO = le quarré ABMG ; C. Q. F. D.

188. Sans changer rien à la longueur des côtés AB, BC du triangle rectangle ABC, ſuppoſons que l'angle droit ABC s'ouvre, c'eſt-à-dire,

& de l'angle BCA. Or, quand deux triangles ont deux côtés égaux, chacun à chacun, & l'angle compris entre ces côtés égal de part & d'autre, il eſt viſible que ces deux triangles ſont égaux en ſurface ; & pour démontrer cette égalité, on n'eſt point obligé d'avoir recours à la comparaiſon des deux triangles SCM, ABC, comme vous avez fait.

Si j'avois voulu être l'écho des échos qui ont écrit ſur la Géométrie, faire un tas de Propoſitions, & non pas en conſtruire un édifice, il n'eſt pas douteux que j'euſſe évité ce reproche ; mais il faut que je le répète : en travaillant à la compoſition de l'Ouvrage que je donne au Public, entre pluſieurs objets que je m'y ſuis propoſés, celui de déduire une Propoſition immédiatement de celle qui la précède, m'a paru mériter une attention particuliere. Juſqu'ici perſonne n'a oſé le tenter : on a cru même que l'exécution n'en étoit pas poſſible ; c'eſt néanmoins ce dont je ſuis venu à bout, & ce qui m'a impoſé la néceſſité de démontrer la Propoſition préſente par le moyen qui m'a occaſionné cette Note. Autrement cette Propoſition n'auroit pas été déduite immédiatement de la Propoſition précédente.

Je conviens que ma Démonſtration en devient un peu plus longue ; mais un inconvénient auſſi mince n'eſt pas capable de balancer les avantages que nous avons retirés de cette méthode. Elle préſente à l'eſprit une Généalogie non interrompue de Propoſitions fort ſimples & en aſſez petit nombre, avec leſquelles nous avons réſolu tout ce que l'on peut tirer de plus intéreſſant de la Géométrie ordinaire ; cela eſt un très-grand ſoulagement pour l'eſprit, qui par la méthode ordinaire ſe trouve accablé d'une multitude de Propoſitions ſans ordre, abſolument inutiles au deſſein unique que l'on devroit ſe propoſer, d'exercer la raiſon des jeunes gens à des vérités réductibles à nos uſages.

qu'il devienne obtus; les points A, C s'écarteront, leur distance deviendra plus grande, & par conséquent le quarré AC du côté opposé à l'angle obtus, sera plus grand que la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés.

Et si l'angle droit ABC se ferme ou devient aigu, les points A, C se rapprocheront, leur distance AC diminuera; ainsi le quarré du côté AC opposé à l'angle aigu, sera plus petit que la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés (*a*).

189. D'où il suit, que la converse de la Proposition 18 (nº. 187.) est très-véritable; c'est-à-dire, si un triangle est tel, que le quarré d'un de ses côtés soit égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés, ce triangle sera nécessairement rectangle: car s'il ne l'étoit pas, il ne pourroit avoir la propriété qu'on lui attribue (nº. 187.).

190. Puisque $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ (nº. 187.); donc $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ ou $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$: c'est-à-dire, que si du quarré de l'hypothénuse l'on ôte un des quarrés faits sur les autres côtés, on aura le quarré de l'autre côté.

Supposons présentement $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$: on aura $\sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2} = AB$; ce qui signifie, que l'on trouvera la valeur d'un côté AB, en tirant la racine quarrée de la différence entre le quarré de l'hypothénuse & celui de l'autre côté.

191. Lorsque l'on connoît les trois côtés d'un triangle, on peut donc toujours se convaincre, s'il est Rectangle, Obtusangle ou Acutangle. Car ce

(*a*) On peut rendre cette Démonstration oculaire avec les jambes d'un compas. On disposera les jambes à angles droits: les ouvrant ensuite, ou les fermant, on verra leurs extrémités s'éloigner ou se rapprocher.

triangle ſera équilatéral, iſoſcèle ou ſcalène. Dans le premier cas, tous ſes angles ſont aigus. Dans le ſecond & le troiſième cas, examinez ſi le quarré du plus grand côté eſt égal à la ſomme des quarrés faits ſur les deux autres côtés : ſi vous trouvez cette égalité, le triangle eſt rectangle. Le quarré du plus grand côté ſurpaſſant la ſomme des deux autres quarrés, le triangle eſt obtuſangle ; enfin c'eſt un triangle acutangle, lorſque le quarré du plus grand côté eſt plus petit que la ſomme des deux autres quarrés (n°. 187).

192. Cette obſervation peut avoir ſon utilité, lorſque l'on cherche à déterminer la ſurface d'un triangle dont on ne peut meſurer que les trois côtés ; car ſi l'on trouve qu'il eſt rectangle, on multipliera les deux côtés qui comprennent l'angle droit, l'un par l'autre, & la moitié de ce produit donnera la ſurface du triangle propoſé.

Suppoſons, par exemple, que les côtés du triangle ABC (*fig.* 34.) ayant été meſurés, l'on ait trouvé AC = 10 toiſes, AB = 6, BC = 8. Quarrez tous ces côtés ſéparément. Le quarré de AC = 100 ; celui de BC = 64, & celui de AB = 36. Prenez la ſomme des deux petits quarrés 64 & 36 = 100, valeur du quarré du plus grand côté AC. Le triangle ABC eſt donc rectangle en B. Ainſi, en prenant BC pour baſe de ce triangle, AB en ſera la hauteur. Multipliez donc BC par la moitié de AB, ou 8 par 3 ; le produit 24 toiſes quarrées eſt la valeur du triangle ABC.

Mais, ſi le plus grand côté AC ne contenoit que 9 toiſes, le quarré de 9 donnant 81, nombre plus petit que 100 qui eſt la ſomme des deux autres quarrés, l'angle B ſeroit aigu ; & ce ſeroit un angle obtus, ſi AC valoit 11 toiſes, parceque le quarré de 11 = 121, nombre plus grand que 100, ſomme

des quarrés faits sur les deux autres côtés (n°. 187.).

## PROBLÈME LXXXI.

193. Trouver la surface d'un triangle isoscèle ABC (*fig.* 35.) acutangle ou obtusangle, dont on ne connoît que les trois côtés. On sçait que AC = 4 perches ; AB & BC en valent 3 chacun.

## RÉSOLUTION.

Il est certain que, si l'on peut connoître la perpendiculaire BD abbaissée de l'angle B sur le côté AC, la surface de ce triangle sera trouvée. Remarquez donc que cette perpendiculaire doit nécessairement tomber sur le milieu de AC (n°. 19.). Ainsi AD = 2 perches, & le triangle BDA est rectangle. Par conséquent le quarré de AB ou $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$ (n°. 187.). Ainsi $\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{BD}^2$ : d'où l'on tire $BD = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$. La perpendiculaire BD est donc égale à la racine quarrée de 5 perches quarrées.

Pour avoir cette perpendiculaire très-approchée, réduisons les 5 perches quarrées en pouces quarrés ; elles produiront 233280 pouces quarrés, dont la racine quarrée est 482 pouces courans à peu près, valeur de la perpendiculaire BD.

Multipliez donc la moitié de la base AC, c'est-à-dire, 2 perches ou 432 pouces, par la perpendiculaire BD = 482 pouces : le produit 208224 pouces quarrés exprimera la surface du triangle isoscèle ABC ; & réduisant ce nombre de pouces quarrés en de plus grandes mesures, on trouvera que la surface du triangle ABC = 4 perches 4 toises 6 pieds quarrés.

L'aire du triangle ABC ſe trouvera un peu plus grande, ſi l'on fait uſage de l'approximation des racines, enſeignée n°. 79. Algèb. Tom. I. car, en ſe propoſant d'avoir la racine quarrée de 5 perches quarrées plus approchée que de $\frac{1}{10000}$, on multipliera 5 par le quarré de 10000 = 100000000; & le diviſant ſur le champ par ce même quarré, le nombre 5 ſe trouvera transformé en la fraction $\frac{500000000}{100000000}$, dont il faudra extraire la racine quarrée, tant du numérateur que du dénominateur. Or celle du dénominateur = 10000; (ſupp.) il n'y a donc qu'à extraire celle du numérateur: on la trouvera = 22360, ſous laquelle poſant celle du dénominateur 10000, on verra que la racine quarrée de $5 = \frac{22360}{10000} = \frac{2236}{1000}$, racine ſi approchée qu'il ne lui manque pas $\frac{1}{10000}$ de perche.

Préſentement, il faut multiplier la moitié de la baſe AC ou 2 perches par la perpendiculaire $BD = \frac{2236}{1000}$; & l'on aura $\frac{4472}{1000}$ pour l'aire du triangle propoſé: cela fait 4 perches quarrées + $\frac{472}{1000}$ de perche quarrée. On multipliera cette fraction par 9, (parce qu'une perche quarrée = 9 toiſes quarrées) & cela produira $\frac{4248}{1000}$ de toiſe quarrée = 4 toiſes quarrées + $\frac{248}{1000}$ de toiſe quarrée: en multipliant le numérateur de cette dernière fraction par 36, pour avoir des pieds quarrés, on la trouvera = $\frac{8928}{1000}$ de pied quarré; leſquelles = 8 pieds quarrés + $\frac{928}{1000}$ de pied quarré. Si l'on continue de multiplier le numérateur de cette fraction par 144, pour avoir des pouces quarrés, elle deviendra = $\frac{133632}{1000}$ de pouce quarré = 133 pou-

ces quarrés + $\frac{632}{1000}$ de pouce quarré, dont multipliant le numérateur par 144, pour avoir des lignes quarrées, on aura $\frac{91008}{1000}$ de ligne quarrée = 91 lignes quarrées + $\frac{8}{1000}$ ou $\frac{1}{125}$ de ligne quarrée. Tellement que l'aire du triangle proposé = 4 perches, 4 toises, 8 pieds, 133 pouces, 91 lignes + $\frac{1}{125}$ de ligne quarrée ; & cette aire, qui devroit être la même que la précédente, est néanmoins plus grande, parce que la racine en est plus approchée.

On est entré dans tout le détail de ce calcul, afin que les Commençans aient des modèles sur lesquels ils puissent se régler.

## PROBLÊME LXXXII.

194. Déterminer la surface du triangle scalène ABC (*fig.* 36.) obtusangle ou acutangle, par la seule connoissance de ses trois côtés, dont AC = 5 toises, BC en vaut 4, & BA = 2.

## RÉSOLUTION.

Vous représenterez à peu près la figure de ce triangle sur un brouillon, où vous marquerez la valeur trouvée de chaque côté. Après cela vous abbaisserez une perpendiculaire BD sur le plus grand côté AC, afin que cette perpendiculaire tombe toujours au dedans du triangle. Il est question de connoître cette perpendiculaire.

Pour y parvenir avec plus de facilité, soient AC = $a$, BC = $b$, AB = $c$, AD = $x$ inconnue, parce que l'on ignore à quelle distance du point A tombe la perpendiculaire BD ; ainsi DC (qui vaut AC — AD) sera = $a - x$. Ap-

pellons auſſi la perpendiculaire inconnue BD = $y$; & remarquons que le triangle propoſé ſe trouve réſolu, par la perpendiculaire BD, en deux triangles rectangles BDA, BDC, dans leſquels les côtés BA & BC ſont hypothénuſes, chacun dans leur triangle. On a par conſéquent, en conſidérant d'abord le triangle rectangle ADB, $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BD}$, c'eſt-à-dire, $c^2 = x^2 + y^2$. Paſſant enſuite au triangle rectangle BDC, on en tire $\overline{BC} = \overline{DC} + \overline{BD}$, ou $b^2 = \overline{a - x} \times \overline{a - x} + y^2$; c'eſt-à-dire, (en faiſant le calcul) que $b^2 = a^2 - 2ax + x^2 + y^2$. Si l'on ſubſtitue, dans cette dernière équation, $c^2$ en la place de $x^2 + y^2$, dont on a vu l'égalité, elle deviendra $b^2 = a^2 - 2ax + c^2$; donc (en tranſpoſant) $2ax = a^2 + c^2 - b^2$; & diviſant l'un & l'autre membre par $2a$, l'on trouve $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$; ce qui donne (en ſubſtituant les nombres) $x = \frac{25 + 4 - 16}{10} = \frac{13}{10} =$ AD.

Si l'on reprend l'équation $c^2 = x^2 + y^2$, & que l'on mette les nombres trouvés en la place des lettres, on aura $4 = \frac{169}{100} + y^2$; &, en tranſpoſant, on trouve $4 - \frac{169}{100} = y^2 = \frac{400}{100} - \frac{169}{100} = \frac{231}{100}$; donc (en extrayant la racine quarrée de part & d'autre) $y$ ou BD = $\sqrt{\frac{231}{100}}$. Ce qui ſignifie que la perpendiculaire BD = la racine quarrée de 231 toiſes quarrées diviſées par 100; & réduiſant les 231 toiſes quarrées en pouces quarrés, vous trouverez BD = $\sqrt{\frac{1197504}{100}} = \frac{1094}{10}$ de pouces courans à peu près.

Dans le triangle ABC on connoît donc la baſe CA = 5 toiſes ou 360 pouces, & la perpendiculaire BD = $\frac{1094}{10}$ de pouces. Par conſéquent on en aura la ſurface, en multipliant la moitié de la baſe = 180 par $\frac{1094}{10}$, qui eſt l'expreſſion en pouces de la perpendiculaire BD: le produit ſera 19692 pouces quarrés, leſquels réduits en toiſes, valent 3 toiſes 28 pieds 108 pouces quarrés.

On trouvera que le calcul ſera beaucoup plus ſimple, plus expéditif, & plus juſte, en faiſant uſage de l'approximation des racines, dont on a vû l'art au chapitre de l'Algèbre (n°. 79.). Sans réduire les $\frac{231}{100}$ de toiſe quarrée en pouces quarrés ou en lignes, &c. ſi on en veut avoir la racine quarrée plus approchée que de $\frac{1}{10000}$, on obſervera d'abord que la racine quarrée du dénominateur 100 eſt 10, & qu'ainſi l'approximation ne peut regarder que le numérateur 231, qui n'eſt pas un nombre quarré. On le multipliera donc par le quarré de 10000, comme on l'a enſeigné à l'article de l'approximation des racines; ce qui produira 2310000000; & le diviſant ſur le champ par la même quantité qui l'a multiplié, le numérateur 231 ſe trouvera ſous la forme de la fraction $\frac{2310000000}{100000000}$, dont on ſçait que l'on a la racine quarrée, en extrayant celle du numérateur & celle du dénominateur: or celle du dénominateur eſt tirée, c'eſt 10000 (ſupp.); il ne reſte donc qu'à extraire, par la règle ordinaire, la racine quarrée du numérateur 2310000000, que l'on trouvera = 151986; & poſant deſſous celle de ſon dénominateur, on verra que la racine quarrée de 231 = $\frac{151986}{10000}$ de toiſe courante; racine ſi approchée qu'en l'augmentant ſeulement de $\frac{1}{10000}$, elle ſeroit trop grande: or $\frac{1}{10000}$ de toiſe eſt preſque inaſſignable, cela n'excède guère

un point, puiſqu'on ne trouve que 10368 points dans la longueur d'une toiſe; par conſéquent la préciſion rigoureuſe, ſi elle étoit poſſible ici produiroit à peine une différence diſcernable. Suppoſant donc que nous avons la racine éxacte du numérateur 231; on la diviſera par 10, qui eſt celle de ſon dénominateur 100, & l'on verra que la perpendiculaire BD, que l'on a trouvée $= \sqrt{\frac{231}{100}}$, vaut auſſi $\frac{151\,86}{100000}$ de toiſe courante.

Pour avoir la valeur du triangle ABC, on multipliera donc ſa baſe CA = 5 toiſes par la moitié de cette perpendiculaire BD; cela produira $\frac{3.79965}{100000}$ de toiſe quarrée, leſquelles valent 3 toiſes quarrées $+\frac{79365}{100000}$. On ſçait qu'une toiſe quarrée = 36 pieds quarrés; en multipliant donc le numérateur 79965 de la fraction précédente par 36, on aura $\frac{28.78740}{100000}$ de pied quarré, qui valent 28 pieds quarrés $+\frac{78740}{100000}$ de pied quarré; laquelle fraction multipliée par 144 (parce qu'un pied quarré = 144 pouces quarrés) produira $\frac{113.38560}{100000}$ de pouce quarré : c'eſt 113 pouces quarrés $+\frac{38560}{100000}$ de pouce quarré. Si on multiplie encore cette dernière fraction par 144, elle donnera $\frac{55.52640}{100000}$ de ligne quarrée, leſquelles valent 55 lignes quarrées $+\frac{52640}{100000}$; laquelle fraction, réduite à ſa plus ſimple expreſſion $= \frac{329}{625}$ de ligne quarrée; de ſorte que l'aire du triangle ABC = 3 toiſes, 28 pieds, 113

pouces, 55 lignes quarrées + $\frac{3129}{6225}$ de ligne quarrée (*a*).

Il ne faut pas être surpris que cette aire se trouve plus grande que celle de la méthode précédente, qui n'a donné que 3 toises 28 pieds & 108 pouces quarrés quoiqu'elle dût être la même. C'est que dans l'extraction des racines, on néglige beaucoup moins en approchant par des dix millièmes de toises que par des pouces.

Comme ces institutions peuvent être utiles à ceux qui ont déja quelque connoissance en Géométrie, nous avons choisi ce dernier cas qui n'est pas des plus simples, afin qu'ils apprennent à se démêler des calculs un peu compliqués. Cependant nous allons résumer dans une règle générale tous les procédés que nous avons tenus.

(*a*) Je conseille fort que l'on n'emploie jamais d'autre méthode d'approximation que cette derniere; elle paroît longue dans l'explication, parce qu'il faut tout dire aux Commençans; mais elle est fort courte dans la pratique. Ses avantages ont été exposés à la fin du n°. 79. de l'Algeb. Tom. I. On peut le relire, on y verra qu'on peut se dispenser d'écrire plus d'une fois le dénominateur 100000, que l'on a répété ici autant de fois que doit le supposer une personne instruite, mais dont la suppression auroit peut-être embarrassé celles qui ne le sont pas ou qui ne le sont pas assez. C'est dans ce même esprit, que je leur dirai encore, que le point mis dans quelques-unes des fractions supérieures, en distingue les entiers, qui sont à la gauche, des parties fractionnées qui sont à la droite; ce qui procure une commodité dans la division, laquelle n'est point du tout à négliger; puisque ce point seul, placé convenablement, donne tout-à-coup & les entiers & la fraction de la division qui se présente, ainsi qu'il est expliqué au même n°. 79. de l'Algèb. Tom. I.

# RÉGLE GÉNÉRALE

*Pour le calcul des triangles ſcalènes, acutangles ou obtuſangles, dont on cherche la ſurface, lorſque l'on n'en connoît que les trois côtés.*

195. Prenez l'équation $DC = \frac{\overline{CA}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}{2\,CA}$, qui eſt l'expreſſion du plus grand ſegment; cette équation vous montre qu'afin d'avoir la valeur du grand ſegment DC, il faut retrancher le quarré du plus petit côté AB, de la ſomme des quarrés des deux plus grands côtés CA, BC, & diviſer ce reſte par le double du plus grand côté CA.

La valeur de DC une fois connue, la perpendiculaire BD eſt aiſée à connoître: car on ſçait (n°. 187.) que $\overline{BC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{BD}^2$. D'où l'on tire $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{DC}^2$, ou $BD = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{DC}^2}$. C'eſt-à-dire, que la perpendiculaire DB ſe détermine, en tirant la racine quarrée de la différence qu'il y a entre le quarré de BC, & le quarré du grand ſegment DC (*a*).

(*a*) La Démonſtration de la Propoſition dix-huit, & la Réſolution des Problêmes ſoixante-dix-huit & ſoixante-dix-neuf, pourroient embarraſſer un peu les jeunes gens, à cauſe que le détail en eſt aſſez long; mais avant qu'ils y arrivent, ils auront déjà acquis quelque habitude à l'application. A propos de cela j'avertirai que l'on ne ſçauroit trop exercer les Commençans au calcul; la Géométrie en fait un uſage ſi continuel, qu'il n'eſt pas poſſible de faire quelques progrès dans cette ſcience ſans ſon ſecours, ſur-tout lorſqu'on le met ſous la forme d'une équation, comme je l'ai dit ailleurs.

## PROBLÊME LXXXIII.

196. Déterminer la longueur que l'on doit donner aux échelles, afin qu'elles soient proportionnées aux murailles que l'on se propose d'escalader (*fig.* 37.).

## RÉSOLUTION.

Supposons que la hauteur de la muraille soit représentée par la ligne AB = 6 toises, & que BC = 2 toises, soit la distance du pied de l'échelle à la muraille (on pose les échelles en taluant, de peur qu'elles ne se renversent.).

L'échelle AC représente alors l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont on connoît les deux côtés AB, BC. Or le quarré de l'hypothénuse AC vaut la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés AB, BC (n°. 187.). On aura donc $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 36 + 4 = 40$ toises quarrées; ainsi $AC = \sqrt{40}$. Réduisez donc les 40 toises quarrées en pouces ou même en lignes quarrées; cette réduction produira 2985984 lignes quarrées, dont la racine quarrée est 5464 lignes courantes = 6 toises 1 pied 11 pouces 4 lignes, valeur de l'hypothénuse AC si approchée, qu'il ne lui manque pas la longueur d'une ligne.

## PROBLÊME LXXXIV.

197. Trouver la surface du terrein irrégulier ABCDE, dont on ne peut connoître que le circuit ou le contour (*fig.* 38.).

## PREMIER MOYEN.

Renfermez cette figure dans un rectangle OSPL, en abbaiſſant des angles E, C, les plus ſaillans, les perpendiculaires EO, CS, ſur le côté AB prolongé de part & d'autre, autant qu'il en ſera beſoin; & prolongeant ces perpendiculaires juſqu'aux points L, P, tels que de l'angle D on puiſſe abbaiſſer une troiſième perpendiculaire LDP ſur les deux premières, on meſurera le rectangle OSPL, & les quatre triangles rectangles EOA, CBS, CDP, DEL, dont on fera une ſomme, on retranchera la ſomme de ces triangles de la ſurface du rectangle OSPL: il eſt évident que le reſte donnera la ſurface de la figure irrégulière ABCDE.

Remarquez que par ce moyen il n'eſt pas beſoin de connoître les angles, ni même les côtés qui terminent la pièce de terre ABCDE; mais, comme il n'eſt pas toujours poſſible de s'étendre autour du terrein que l'on veut meſurer, il eſt quelquefois néceſſaire de connoître la longueur de ſes côtés, & la grandeur de ſes angles.

## SECOND MOYEN.

198. Meſurez les côtés & les angles du terrein ABCDE (*fig.* 39.). Ecrivez toutes ces meſures, ou plutôt faites un brouillon qui repréſente à peu-près les côtés & les angles du terrein propoſé, comme vous le voyez dans la figure 39, où l'on a écrit le long de chaque côté au dehors le nombre de toiſes qu'il contient, & au dedans les degrés de chaque angle.

Vous choiſirez enſuite un terrein dans la campagne, où vous puiſſiez faire une figure 40 tout-à-fait égale à la figure 39: ceſt-à-dire, que vous ferez

MN = AB = 4 toises; l'angle N = A; le côté NO = AE = 5 toises; l'angle O = E; le côté OP = DE = 2 toises; l'angle P = D; le côté PT = DC = 6 toises; l'angle T = C; ce qui donnera l'angle M égal à l'angle B: ainsi la figure MNOPT sera égale en tout au terrein ABCDE, puisque tous les côtés & tous les angles de l'un sont égaux à tous les côtés & à tous les angles de l'autre, chacun à chacun; par conséquent, en mesurant le terrein MNOPT, au dedans duquel il est libre d'opérer (Probl. 76. n°. 182.), on aura la mesure du terrein ABCDE, dont l'intérieur n'est pas accessible.

Le Problême 82 (n°. 194.), que nous avons résolu par la propriété du triangle rectangle, pourroit tirer sa résolution du moyen que nous venons d'exposer; mais la voie seroit plus longue.

## TROISIÈME MOYEN.

199. On lévera le plan du terrein ABCDE (*fig.* 39.), c'est à dire, que l'on fera en petit une figure *a b c d e* (*fig.* 41.) semblable à la grande figure que l'on se propose de mesurer. Or voici comment cela s'éxécute. Vous tracerez au bas d'un carton bien uni une ligne MN, que vous diviserez en autant de parties égales que vous en aurez besoin (n°. 63.); par exemple, en 15: cette ligne ainsi divisée s'appelle une *échelle*. Vous allez en voir l'usage.

Tirez sur votre papier une ligne *ab* (*fig.* 41.) qui contienne quatre parties égales de l'échelle, pour représenter AB = 4 toises. Faites l'angle *b a e* = l'angle BAE pris sur le terrein, (car je suppose que l'on a mesuré les côtés & les angles du terrein ABCDE) & portez cinq parties de

de votre échelle depuis *a* jusqu'en *e*; le petit côté *ae* représentera le grand côté AE = 5 toises. Faites ensuite au point *e* l'angle *aed* égal à l'angle AED; prenez deux parties de votre échelle, portez-les de *e* en *d*: la ligne *ed* représentera ED = 2 toises. Continuez à faire au point *d* un angle *edc* = l'angle EDC du terrein, & donnez six parties de votre échelle au petit côté *dc*, pour représenter les six toises du grand côté DC, & tirez *ch* qui ferme la figure *abcde*: elle sera en petit ce que la figure ABCDE est en grand; la grande figure pourra donc être connue par la petite: c'est pourquoi si de l'angle *a* on tire les lignes *ad*, *ac*, elles diviseront la petite figure en trois triangles, dont on cherchera l'aire séparément, en abaissant les perpendiculaires *er*, *as*, *bx*, sur les bases de ces triangles. On portera ces bases & ces perpendiculaires sur l'échelle MN, pour voir combien elles en contiennent de parties. On évaluera ces triangles à l'ordinaire, & leur somme représentera la surface du terrein ABCDE.

## DÉMONSTRATION.

Puisque chaque partie de l'échelle MN est prise pour une toise, le quarré de cette partie représentera une toise quarrée; mais (const.) les lignes de la petite figure contiennent autant de parties de l'échelle que les lignes correspondantes de la grande contiennent de toises. Il y aura donc autant de toises quarrés dans le contenu du terrein ABCDE, qu'il y a de petits quarrés dans la surface du petit plan *abcde*; & par conséquent ce petit plan est fort propre à faire connoître la surface du terrein dont il est le modèle (*a*).

(*a*) Cette Démonstration est plutôt une Démonstration de sentiment qu'une Démonstration en forme. J'en convien: cependant il

La multitude d'opérations que l'on eſt obligé de faire en prenant la longueur des côtés & la grandeur des angles d'un terrein dont on veut avoir le plan, expoſe à beaucoup d'erreurs ; on en diminueroit le nombre, ſi l'on pouvoit ſe paſſer de connoître la valeur des angles.

## QUATRIEME MOYEN,

*D'évaluer la ſurface d'un terrein inacceſſible au-dedans, ſans qu'il ſoit néceſſaire de connoître les angles qui la terminent.*

Quand cette figure eſt un triangle, c'eſt la choſe du monde la plus aiſée. Meſurez les trois côtés AB, BC, CA, qui enveloppent votre terrein (*fig.* 42.). Pour le rapporter ſur le papier, ayez recours à l'échelle MN. Prenez donc ſur cette échelle ſix parties, que vous donnerez à la petite ligne *ab*, (*fig.* 43.) qui repréſentera ainſi les ſix perches du côté AB. De l'extrémité *a*, avec ſept parties de l'échelle, décrivez un arc ; & de l'extrémité *b* avec quatre parties de l'échelle, décrivez un autre arc qui coupe le premier en *c* : il eſt évident que le petit triangle *abc* ſera un modèle parfait du grand triangle ABC. Car ſi le grand côté AC = 7 perches, le petit côté *ac* contient auſſi ſept parties égales ; & les quatre parties du petit côté *bc*

m'a paru qu'on n'en devoit pas abſolument condamner l'uſage, ſurtout à l'égard des vérités que l'on ſçait être démontrées par d'autres voies plus rigoureuſes. Cette méthode ſoutient & anime le goût des Commençans, qui ont une prodigieuſe envie d'aller en avant : d'ailleurs, ſi l'on conſidère bien cette maniere, elle eſt plus de génie que de calcul ; elle eſt par conſéquent moins fatigante, ce qui mérite quelques égards.

Ceux qui ne ſe contenteront pas de ce que nous diſons ici, n'auront qu'à conſulter le Chapitre des lignes proportionnelles ; ils y ſeront pleinement ſatisfaits. Notre deſſein a été de faire voir qu'indépendamment de la rigueur géométrique, l'on pouvoit faire concevoir la maniere de lever les plans, & d'en déterminer l'aire ou la ſurface.

répondent aux quatre perches du grand côté BC; par conséquent en mesurant la surface du petit triangle *a b c*, on aura celle du grand triangle ABC (n°. 197).

Si le terrein proposé n'a pas une figure triangulaire, comme la figure 44, on pourra néanmoins le représenter sur le papier avec la même précision que nous y avons représenté le triangle, sans avoir égard à la grandeur de ses angles.

On en toisera d'abord les côtés, auxquels je suppose les dimensions marquées dans la figure 44; & pour en avoir les angles sans les prendre avec un instrument, par exemple, pour déterminer l'angle ABC, on prolongera le côté AB autant qu'il en sera besoin, jusqu'en M, & l'on pourra prendre sur le côté BC la partie BT = BM = 4 toises; on toisera aussi MT = 7 toises.

Toutes ces dimensions étant écrites, on se disposera à représenter sur le papier le terrein ABCD, en faisant usage de l'échelle MN. Ainsi on tracera la ligne *ab* (*fig.* 45), à laquelle on donnera dix parties de l'échelle, afin de représenter les dix toises du côté AB; & faisant le prolongement *b m* = 4 parties de l'échelle, pour répondre aux quatre toises du grand prolongement BM, on construira, comme ci-dessus, le petit triangle *b m t*, dont les côtés auront entr'eux les mêmes dimensions que ceux du grand triangle BMT, c'est-à-dire, que *m t* aura sept parties de l'échelle, & *b t* en aura quatre; ce qui donnera l'angle *a b c* = l'angle ABC. Après quoi on fera *b c* = 8 parties de l'échelle: cette ligne représentera les huit toises du côté BC. Enfin l'on déterminera l'angle BCD par le même moyen qui vient de nous donner la grandeur de l'angle ABC; & ainsi des autres; la figure 45 représentera donc en petit la longueur

des côtés, & la grandeur des angles du terrein ABCD; par conséquent la mesure de la petite figure 45 fera connoître la surface du terrein ABCD (n°. 197.).

## PROBLÊME LXXXV.

200. Lever le plan d'un terrein ABCDE, dont on peut parcourir l'intérieur (*fig.* 46.).

### RÉSOLUTION.

Mesurez le contour du terrein ABCDE, & les lignes EB, EC, qui le partagent en triangles, dont chaque côté contient le nombre de perches marqué sur la figure; il n'est pas besoin d'en mesurer les angles. Servez-vous donc d'une échelle MN, qui contienne au moins autant de parties égales, que le plus grand côté BC = 5 contient de perches.

Il faut à présent procéder à construire une petite figure *abcde* (*fig.* 47.), qui représente en petit tout ce que le terrein ABCDE possède en grand. Tracez *ae* sur un carton bien uni, à laquelle vous donnerez trois parties de l'échelle, pour répondre aux trois perches du grand côté AE; des points *a*, *e*, avec deux parties de l'échelle, décrivez deux arcs qui se coupent au point *b*; tirez la ligne *ab*, & ponctuez *eb* ligne de construction: les deux petites lignes *ab*, *be* représentent les deux grands côtés AB, BE, qui ont chacun deux perches: ensorte que le petit triangle *bae* contient dans sa petite étendue tout ce qui est en grand dans le triangle BAE; réduisons donc, en suivant la même méthode, le triangle BEC au petit triangle *bec*, en prenant cinq parties de l'échelle, avec lesquelles du point *b* nous décrirons un arc; après

quoi, avec quatre parties de la même échelle, du point *e* nous en tracerons un autre qui coupera le premier en un point *c*, où tirant *b c*, on ponctuera *c e*. Pour achever la figure *a b c d e*, qui eſt un modèle parfait du terrein ABCDE, du point *c*, avec deux parties de l'échelle, vous décrirez un arc qui ſe trouvera coupé au point *d* par un autre arc décrit du point *e* avec trois parties de l'échelle: vous tracerez *e d*, *c d*, & vous aurez un plan très-exact du terrein ABCDE; puiſque les dimenſions de la petite figure *a b c d e* ſont exactement correſpondantes aux dimenſions du terrein ABCDE.

## PROBLÊME LXXXVI.

201. Trouver la ſurface d'un polygone régulier ABDEFGHL, par exemple, d'un baſſin octogone rempli d'eau, ſans entrer au-dedans de ce polygone (*fig.* 48.).

## RÉSOLUTION.

Il eſt clair que le Problême ſe réduit à trouver la ſurface du triangle ACB; puiſque ce polygone étant compoſé de 8 triangles égaux, en multipliant par huit la ſurface de l'un de ces triangles, le produit donnera la ſurface totale de ce polygone.

Rappellez-vous que le côté AB d'un polygone régulier eſt coupé en deux parties égales par la perpendiculaire CO abaiſſée du centre C (n°. 122.); que l'angle ABD d'un tel polygone eſt auſſi coupé en deux parties égales par une ligne CB tirée du centre au ſommet de cet angle; & que l'on détermine la valeur de cet angle, en retranchant l'angle ACB au centre de 180 degrés (n°. 121.). Or l'angle au centre de l'octogone régulier = 45

degrés, huitième partie de 360. Retranchant donc 45 de 180, on a 135 pour l'angle ABD de l'octogone, dont la moitié $= 67\frac{1}{2}$ est la valeur de l'angle CBO. On peut mesurer BO, moitié du côté BA.

Cela supposé, construisez sur un terrein le plus uni que vous pourrez trouver, un triangle RPS (*fig.* 49.) égal au triangle CBO, en faisant RP = OB; l'angle SRP égal à l'angle droit COB, & l'angle $SPR = 67$ degrés $\frac{1}{2}$ = l'angle CBO: le point S, où les deux lignes RS, PS se rencontreront, déterminera le triangle RSP entièrement égal au triangle CBO (n°. 85.); mesurez donc le triangle SRP, c'est-à-dire, multipliez la base RP par la perpendiculaire SR, vous aurez un produit double du triangle SRP, ou de CBO = SRP: or le triangle ACB est double du triangle CBO; le produit de RP par RS exprimera donc la valeur du triangle ACB; & ce produit multiplié par 8 donnera la surface totale de l'octogone régulier.

En levant le plan de ce polygone, on pourroit encore en trouver l'aire ou la surface, ainsi que nous l'avons enseigné (n°. 197.).

Les bassins sont quelquefois d'une figure circulaire. La base ou le plan sur lequel pose une colonne est un cercle: il faut donc sçavoir trouver l'aire d'un cercle, afin qu'il n'y ait aucun cas qui puisse arrêter.

## PROBLÊME LXXXVII.

202. Trouver la surface d'un cercle, au-dedans duquel il est libre de s'étendre (*fig.* 51.).

## RÉSOLUTION.

On plantera des piquets fort proches les uns des

autres ſur la circonférence du terrein circulaire. On y appliquera une meſure pliante, une chaîne ou un cordeau, autant de fois qu'il en ſera beſoin; on meſurera auſſi le rayon OS; on multipliera les toiſes que contient la circonférence par les toiſes du rayon: la moitié de ce produit donnera la ſurface du cercle.

Il s'agit de prouver que l'aire du cercle eſt égale à la moitié du produit de la circonférence S S par le rayon O S.

Tirez tout autour du centre O les rayons OS fort près les uns des autres (*fig.* 51.), afin que la ſurface circulaire ſoit diviſée en un très-grand nombre de petits triangles S O S, qui ont pour hauteur le rayon O S, & pour baſe les petits arcs S S, qui ne s'écartent pas ſenſiblement de la ligne droite, à cauſe de l'énorme petiteſſe dont on peut prendre ces arcs; mais pour évaluer chaque petit triangle S O S, on prendroit la moitié du produit de la baſe S S par le rayon O S; par conſéquent afin d'avoir la ſurface de tous ces triangles, on prendroit tous les arcs S S S, c'eſt-à-dire, toute la circonférence, que l'on multiplieroit par le rayon, pour avoir dans la moitié de ce produit la ſurface de tous ces triangles réunis, ou, ce qui eſt la même choſe, l'aire du cercle entier, qui eſt compoſé de ces triangles; C. Q. F. D. (*a*).

Si l'on ne peut pas s'étendre ſur la ſurface du cercle, que l'on ſoit obligé de trouver l'aire d'un baſſin circulaire plein d'eau, on aura recours à un moyen très-élégant, dont les Géomètres ſont rede-

(*a*) Nous avouons que cette Démonſtration pourroit être plus exacte. Mais il ne nous a pas paru poſſible de la rendre telle pour des enfans à qui ce premier Livre eſt principalement deſtiné. Quand on aura vu ce que nous dirons dans la ſuite de la méthode d'exhauſtion, il ſera facile de l'appliquer à cette Démonſtration pour la rendre rigoureuſe.

vables au célèbre Archimède, ſi profond dans les Mathématiques. Ce rare génie, qui a découvert tout ce qu'il y a de plus difficile dans la Géométrie utile, a trouvé qu'un cercle ayant ſept pieds de diamètre, avoit à peu près vingt-deux pieds de circonférence. Nous ne ſçaurions faire entrer les Commençans dans les recherches qui ont conduit cet homme extraordinaire à cette découverte; qu'il leur ſuffiſe d'en apprendre l'uſage, juſqu'à ce qu'ils aient la force d'en connoître l'eſprit.

## PROBLÊME LXXXVIII.

203. Trouver la ſurface d'un cercle, dont on ſçait que la circonférence contient dix pieds (*fig.* 50).

## RÉSOLUTION.

On a beſoin du rayon, ou de la moitié du diamètre SD: ſuppoſant la découverte d'Archimède, nous ferons cette règle de trois: *22 eſt à 7, comme 10 eſt à SD*, diamètre cherché; d'où l'on déduit $SD = \frac{70}{11}$ de pied, dont la moitié $= \frac{35}{22} = CS$, rayon dont on cherchoit la valeur: multiplions donc 5 pieds, moitié de la circonférence, par $\frac{35}{22}$ de pied valeur du rayon; le produit $\frac{175}{22}$ de pied quarré exprime l'aire du cercle, dont la circonférence = 10 pieds; & ſi l'on achève ce calcul, on trouvera que $\frac{175}{22}$ de pied quarré = 7 pieds, 137 pouces, 65 $+\frac{1}{11}$ de ligne quarrée.

Par le diamètre connu on pourroit auſſi déterminer la circonférence, comme vous allez voir.

## PROBLÊME LXXXIX.

204. Evaluer la ſurface d'un cercle dont le diamètre $SD = \frac{35}{11}$ de pied (*fig.* 50).

## RÉSOLUTION.

Faites cette règle de trois : 7 est à 22, comme $\frac{35}{11}$ est à la circonférence que l'on cherche $=$ 10 pieds : car multipliant $\frac{35}{11}$ par 22 $=$ $\frac{770}{11}$ ; & divisant ce produit par 7, on trouve 10 pour la circonférence. Le diamètre & la circonférence d'un cercle étant connus, sa surface est aisée à connoître (n°. 202.).

### *REMARQUE.*

Lorsqu'on cherche la circonférence, on observera que la règle de trois doit commencer par 7 : si c'est le diamètre, elle commencera par 22.

## PROBLÊME XC.

205. Trouver la surface d'un *Secteur* de cercle BAC (*fig.* 52.).

## RÉSOLUTION.

Un *Secteur* de cercle est la portion d'une surface circulaire renfermée entre deux rayons AB, AC, & l'arc BC qui la termine. Vous trouverez l'aire de ce secteur, en enveloppant l'arc BC d'une mesure pliante qui indiquera les toises, les pieds, &c., contenus dans cet arc ; on toisera aussi le rayon ; on multipliera le rayon par l'arc, & la moitié du produit déterminera l'aire du secteur BAC. Cela est clair par la Démonstration du n°. 202.

Si vous ne pouvez connoître que l'arc BC de ce secteur, sans pouvoir mesurer son rayon, employez le moyen suivant, qui est totalement indépendant de la découverte d'Archimède.

## PROBLÊME XCI.

206. Moyen méchanique & Géométrique de trouver le rayon d'un cercle ou d'un ſecteur, en ſuppoſant ſimplement qu'on puiſſe appliquer quelque meſure ſur une portion de la circonférence ou du ſecteur (*fig.* 53.).

### EXPOSITION DE CE MOYEN.

Prenez une lame fléxible (*a*), dont la matière retienne facilement la forme que l'on a deſſein de lui faire prendre, par exemple une lame de plomb ou de cire qui ſoit de bonne conſiſtance : appliquez cette lame ſur la portion de circonférence B C, afin qu'elle prenne la forme circulaire de cet arc; enlevez cette lame ainſi conformée ; placez-la ſur un terrein libre & bien uni, où vous tracerez un ſillon le long de ſon contour B O C. Ce ſillon repréſentera une portion de circonférence égale à l'arc BC. Cherchez le centre de cet arc (n°. 130.); vous aurez le rayon A B, avec lequel vous décrirez une circonférence entière que vous meſurerez, ainſi que nous l'avons enſeigné : la circonférence & le rayon connus, il ne s'agit plus que de calculer pour avoir la ſurface du cercle ou du ſecteur ; ce qui eſt fort aiſé (n°. 202 & 205.).

Si l'on ne connoît que le rayon ou le diamètre du cercle que l'on veut meſurer, avec ce rayon ou ce demi-diamètre connu, on tracera une circonférence ſur un terrein qui permette que l'on applique une meſure à cette circonférence ; on en aura par ce moyen la longueur en toiſes, pieds, &c., & par conſéquent l'aire du cercle propoſé.

(*a*) Il ne ſeroit pas abſolument néceſſaire d'avoir une lame ; il ſuffiroit d'avoir la diſpoſition de trois points, parce qu'en imaginant une circonférence par ces trois points, on en trouveroit facilement le centre, & par conſéquent le rayon.

Quoique l'on puiſſe évaluer la ſurface d'un ſecteur par la meſure de l'arc qui le termine, parce que l'arc fait connoître le rayon ; la ſeule connoiſſance du rayon ne pourroit pas ſervir réciproquement à déterminer l'aire d'un ſecteur, puiſque le même rayon peut convenir à une infinité de ſecteurs.

## PROBLÊME XCII.

207. Trouver la ſurface d'un *ſegment* de cercle BCAB. On appelle *ſegment* une portion de cercle renfermée entre une corde BC & l'arc BAC ſoutenu par cette corde (*fig.* 54.).

## RÉSOLUTION.

On ſuppoſe d'abord que l'on puiſſe opérer au-dedans de la figure. Cherchez le centre O du cercle auquel ce ſegment appartient (n°. 130.) ; vous aurez le ſecteur BOCAB, dont le ſegment propoſé fait partie. Déterminez l'aire de ce ſecteur (n°. 205.), & celle du triangle BOC (n°. 176.) ; ôtez le triangle du ſecteur : le reſte ſera la valeur du ſegment BCAB, Cela n'a pas beſoin de démonſtration.

Pour connoître la ſurface de ce ſegment, quand on ne pourra meſurer que l'arc BAC qui le termine, on ſe ſervira du moyen que nous avons indiqué (n°. 206.).

## *OBSERVATION SUR LA MESURE des Surfaces.*

208. Il faut prévenir une objection qui eſt toute naturelle. Nous avons meſuré les ſurfaces, comme ſi c'étoient des plans parfaits ; cependant la plupart des terreins ſont rompus, inégaux, raboteux : on y trouve des creux, des côteaux, des monticules, des monts. Un dôme, une demi-

ſphère ont très-certainement plus de ſurface que la terre platte ou la baſe plane, ſur laquelle ils s'appuient ; l'art de l'Arpentage donne par conſéquent aux terreins beaucoup moins de ſurface qu'ils n'en poſsèdent ; n'eſt-ce pas une injuſtice, & ne fait-on pas un tort réel aux Propriétaires ?

Il y a des cas où ces inégalités doivent être conſidérées, & d'autres où l'on ne doit y avoir aucun égard. Une Ville ſituée ſur une colline, dont elle occuperoit toute la pente ou ſimplement une partie, auroit beſoin d'un plus grand nombre de pierres pour être pavée, que ſi elle étoit aſſiſe ſur le plan horiſontal qui lui ſert de baſe, parce que l'on fait ſuivre au pavé la diſpoſition du terrein : on toiſeroit en ce cas la ſurface courbe de la colline ; mais ſi l'on conſidéroit cette Ville par rapport aux maiſons, aux édifices, aux jardins, aux vergers, aux plantations qu'elle renferme, ou que l'on peut y conſtruire, ſa meſure devroit s'eſtimer par celle de ſa baſe horiſontale, quand même cette baſe auroit une étendue incomparablement plus petite que la ſurface convèxe de la colline.

La raiſon en eſt que les édifices, les arbres, les plantes s'élèvent ſur leur terrein perpendiculairement à l'horiſon (*a*) : on doit donc évaluer alors la

(*a*) Polybe a fait cette obſervation, c'eſt au Chap. IV du Liv. IX, qui ſe trouve dans le ſixième Tome de ſon Hiſtoire, traduite par Dom Thuillier, & commentée par M. le Chevalier de Folard. Il s'agit dans ce Chapitre des connoiſſances néceſſaires à un Général d'Armée. *Entre pluſieurs de ces connoiſſances*, que Polybe détaille, *dont les unes ſe peuvent acquérir par l'uſage, par l'expérience, par l'Hiſtoire, il en eſt quelques autres, où l'on a beſoin d'étude & d'obſervations, comme par exemple, celles qui ſe tirent de l'Aſtronomie & de la Géométrie. Ce n'eſt pas qu'il importe beaucoup de poſſéder en entier l'objet de ces deux ſciences ; mais il eſt très-important d'en ſçavoir faire quelqu'uſage ; ce qu'elles apprennent de plus néceſſaire, c'eſt la durée des jours & des nuits : car il n'y a pas ſeulement de la différence entre la longueur du jour & celle de la nuit ; il y en a encore entre un jour & un jour, entre une nuit & une autre nuit ; il faut néceſſairement ſçavoir ce qui les fait croître & diminuer. Sans la connoiſſance de ces changemens, quel moyen de prendre de juſtes meſures pour une marche de nuit ou de jour ? Comment arriver à tems où l'on ſe propoſe*

ſurface de la colline ſur l'étendue que les édifices ou les plantes peuvent occuper verticalement. Or

*d'aller? On arrivera trop tôt ou trop tard.* Polybe indique le moyen de s'en inſtruire; il fait voir les fautes où ſont tombés pluſieurs Généraux qui les ignoroient. J'ajouterai aux connoiſſances tirées de l'Aſtronomie, celles que l'on tire des différens ſignes qui paroiſſent en l'air: il n'y a preſque point de changement de tems un peu remarquable qui n'ait quelque ſigne précurſeur. On doit s'y rendre attentif. Cela peut être utile en bien des rencontres; une pluie, un orage, un vent imprévu peut déranger extrêmement l'ordre ou l'exécution d'un projet, tandis que cette diſpoſition de tems accommodera fort les affaires de celui qui l'aura preſſentie.

Tout le monde connoît la néceſſité de la Géométrie pour la Fortification, pour ſçavoir lever un Plan avec quelque intelligence; mais cette ſcience *eſt encore indiſpenſable pour changer ſelon les occurrences la figure du Camp. Par ce moyen on pourra, en prenant quelque figure que ce ſoit, garder la même proportion entre le Camp, & ce qui doit y être contenu: ou, en gardant la même figure, augmenter ou diminuer l'aire du Camp, eu égard toujours à ceux qui y entrent ou qui en ſortent, comme nous avons fait voir dans notre Traité des ordres de Batailles: & je ne crois pas* (ajoute ce grand Hiſtorien) *qu'on me ſçache mauvais gré de demander à un Général quelque connoiſſance de l'Aſtronomie & de la Géométrie; ajouter des connoiſſances inutiles au genre de vie que nous profeſſons, uniquement pour faire montre & pour parler, c'eſt une curioſité que je ne ſçaurois approuver: mais je ne puis non plus goûter, que dans les choſes néceſſaires on s'en tienne à l'uſage & à la pratique; je conſeille fort de remonter plus haut. Il eſt abſurde que ceux qui s'appliquent à la danſe & aux inſtrumens, ſouffrent qu'on les inſtruiſe de la cadence & de la Muſique, qu'ils s'exercent même à la lutte, parce que cet exercice paſſe pour contribuer à la perfection des deux autres; & que des gens qui aſpirent au commandement des Armées, trouvent mauvais qu'on leur inſpire quelque teinture des autres Arts & des autres Sciences. De ſimples Artiſtes ſeront-ils donc plus appliqués & plus vifs à ſe ſurpaſſer les uns les autres, que ceux qui ſe propoſent de briller dans la plus belle & la plus auguſte des dignités? Il n'y a perſonne de bon ſens qui ne connoiſſe combien cela eſt peu raiſonnable.*

*La plupart des hommes jugeant de la grandeur d'une Ville ou d'un Camp par la circonférence, regardent comme une choſe incroyable, que, quoique Mégalopolis ait de tour cinquante ſtades, & que Lacédémone n'en ait que quarante-huit, cette dernière Ville ſoit cependant une fois plus grande que l'autre. Que ſi, pour augmenter la difficulté, on leur dit qu'il peut ſe faire qu'une Ville ou un Camp de quarante ſtades de tour ſoit une fois plus grand qu'un autre de cent ſtades, c'eſt pour eux un paradoxe. La cauſe de cela eſt qu'on ne ſe ſouvient plus de ce que l'on a appris de Géométrie pendant ſa jeuneſſe.*

*Il y en a qui ſont dans une autre erreur; ils prétendent que les Villes d'un terrein rompu & inégal, ont plus de maiſons que celles qui ſont bâties dans un terrein plat & uni. Il n'en eſt pourtant pas ainſi.* Polybe en donne la Démonſtration que nous avons rapportée; puis il continue: *Soit dit en paſſant en faveur de ceux qui, quoique neufs & ignorans ſur cette matière, veulent cependant commander les Armées & avoir*

cette étendue eſt égale à la baſe horiſontale de la colline. En voulez-vous une démonſtration bien

*la conduite des affaires.* J'ai cru devoir mettre ici ce long paſſage pour faire connoître la manière de Polybe, & le mérite de la Traduction de Dom Vincent Thuillier.

Je prens cette occaſion de payer le tribut d'éloge ſi légitimement dû aux deux illuſtres Auteurs modernes qui ont travaillé ſur Polybe; je veux parler de Dom Vincent Thuillier, Bénédictin de la Congrégation de Saint Maur, & de M. de Folard, Chevalier de l'Ordre Militaire de S. Louis, Meſtre de Camp d'Infanterie. Le premier a traduit Polybe, & le ſecond l'a commenté.

La Traduction de Dom Vincent Thuillier eſt très-belle; le Polybe Grec n'a rien perdu de ſa réputation dans le Polybe François. Il ſeroit difficile de ſoutenir mieux la dignité de ſon ſujet. Si Dom Vincent Thuillier n'a pas ſuivi quelque tems le parti des armes, il faut qu'il ſoit doué d'une très-grande pénétration, pour avoir rendu d'une manière ſi claire & ſi préciſe une Hiſtoire, où il n'eſt guères queſtion que de faits militaires.

Mais le Commentaire du célèbre M. de Folard me paroît unique; les grandes parties de la guerre y ſont développées & démontrées preſqu'auſſi rigoureuſement que les propoſitions de Géométrie: la diſcipline militaire, les évolutions, les armes, les marches, les campemens, les ſurpriſes, les batailles, le paſſage des grandes rivières, la guerre offenſive, la défenſive, la guerre des montagnes, l'attaque & la défenſe des Places, la ſûreté des convois, des eſpions, tout y eſt traité en Philoſophe, c'eſt-à-dire, en remontant aux cauſes qui déterminent les événemens. Son Traité de la colonne eſt un morceau achevé. Polybe, en bien des endroits, ne peut être entendu que par des Militaires qui ont réfléchi ſur une longue expérience; pour comprendre cet Auteur, il faut être homme de guerre, & quelquefois même un grand homme de guerre: M. de Folard enſeigne à l'être. Son érudition eſt très-étendue; elle lui donne lieu de comparer les faits, & de peindre toujours par les actions un grand nombre de perſonnages, dont les vices & les défauts ne ſont pas moins utiles à l'inſtruction que leurs vertus & leurs belles qualités. Les Héros qui ont fait le plus de bruit, ceux dont une longue ſuite de ſiècles paroît avoir aſſuré la réputation, n'ont pas pour cela plus de droit à ſon eſtime: il ne l'accorde qu'aux actions judicieuſes; il y en a de très-éclatantes qu'il a le courage de mettre *au nombre des accidens & des haſards, parce qu'elles ne ſont fondées ſur aucune raiſon ſolide, & que ce qui ſe fait à la guerre ſans but & ſans deſſein, ne mérite pas le nom d'action.*

Je ne finis qu'avec peine ſur les louanges que mérite l'excellent Ouvrage de M. le Chevalier de Folard: je me flatte que le Lecteur me pardonnera cette longue digreſſion en faveur d'un Ecrivain qui fait tant d'honneur à notre Nation; & dont, je ne ſçais par quelle fatalité, il me ſemble que les Etrangers ſont plus d'uſage que nous: nos jeunes Militaires devroient le lire au moins une fois tous les ſix mois; indépendamment de leur métier, ils y apprendroient à s'exprimer avec nobleſſe: pluſieurs perſonnes lui reprochent une trop grande prolixité, d'autres le trouvent fort excuſable, parce qu'il s'agit principalement d'inſtruire; ce qui eſt inutile à ceux qui ſça-

ſenſible, & qui parle aux yeux? Regardez la figure 55, qui peut repréſenter une ville ſituée ſur toute la pente d'une colline, où tous les édifices élevés perpendiculairement à l'horiſon ſont d'égale hauteur, c'eſt-à-dire, que leurs extrémités T, T, &c. ſupérieures, ſont également éloignées de la baſe horiſontale AB: il eſt évident qu'il n'y aura pas plus d'édifices ſur la ligne ſerpentante ACDHB, que ſur la droite horiſontale TTT; mais cette ligne eſt égale à la baſe AB; par conſéquent on ne ſçauroit conſtruire plus d'édifices ſur la pente d'une colline, que ſur le plan horiſontal qui lui ſert de baſe: ainſi les terreins deſtinés aux plantations doivent être meſurés par le plan horiſontal qui leur répond; ceux qui les évaluent ſuivant la ſurface de leur pente, vont directement contre les principes de la vraie Phyſique, & commettent des erreurs très-conſidérables.

Car ſuppoſons qu'un verger en forme de parallélogramme rectangle ABCD (*fig.* 56.), ſoit incliné de 30 degrés à l'horiſon, que ſa longueur AB = 8 perches, & que ſa largeur AD (ſur laquelle ſe prend l'inclinaiſon) en contienne 4: en meſurant ce verger ſuivant ſa pente, ſon terrein contiendra 32 perches quarrées; mais en l'éva-

vent la guerre, eſt néceſſaire à ceux qui l'apprennent. Cela me fait ſouvenir d'un endroit fort remarquable dans la vie de M. le Marquis de Feuquières. *Il y a un grand nombre de ces maximes* (militaires) *qui paroîtront peut-être à certains eſprits de peu de valeur, parce qu'elles ſont d'un uſage trop commun. Mais c'eſt pour cela même que le Marquis de Feuquières les croyoit plus néceſſaires.*

*Il liſoit à un de ſes amis le Chapitre de l'ouverture de la tranchée, où il marque qu'il faut jetter la terre du côté de la Place; cette obſervation parut triviale. N'importe*, répondit-il, *il faut la laiſſer. Auroit-il prévu qu'on dût y manquer au dernier ſiège de Philisbourg? Cette bévue ne peut être attribuée qu'à l'Officier qui conduiſoit les Travailleurs, & qui les a placés d'un côté de la trace de la tranchée, lorſqu'il auroit dû les placer de l'autre. Il n'eſt pas moins ſurprenant que perſonne ne s'en ſoit apperçu que le matin. On ne ſçauroit donc être trop attentif à inſtruire les jeunes Officiers.*

luant, comme on le doit, eu égard à ſon plan horiſontal, on ne trouvera que 27 perches 6 toiſes 12 pieds quarrés. La fauſſe meſure excède donc la véritable de 38 toiſes quarrées & 24 pieds quarrés; ce qui eſt un très-grand objet ſur 27 perches, 6 toiſes, 12 pieds quarrés.

## DÉMONSTRATION.

Puiſque l'inclinaiſon du verger ſe prend ſuivant la largeur AD = 4 perches; ſoit AM, une ligne horiſontale (*fig.* 57.) ſur laquelle AD ſoit élevée de 30 degrés; c'eſt-à-dire, qu'en décrivant un cercle du point A avec la ligne AD, on faſſe l'angle DAM = 30 degrés. Imaginez la perpendiculaire DS ſur l'horiſontale AM: cette perpendiculaire déterminera la largeur AS du plan horiſontal, qui répond au plan incliné ABCD; cherchons donc la valeur de AS.

Remarquons d'abord qu'en prenant un arc MO égal à l'arc DM, on aura DMO = 60 degrés; ainſi DSO qui eſt la corde de cet arc, vaut le rayon AD: car il a été prouvé (n°. 119.) que le rayon du cercle étoit égal à la corde de 60 degrés. De plus DAO étant un triangle iſoſcèle, la perpendiculaire AS diviſera la baſe DSO en deux parties égales (n°. 79.). DS eſt donc la moitié du rayon AD = 4 perches: ainſi DS = 2 perches.

Conſidérons préſentement le triangle rectangle ADS: le quarré de l'hypothénuſe AD eſt égal à la ſomme des quarrés faits ſur les deux autres côtés DS, AS (n°. 186.), c'eſt-à-dire, $\overline{AD}^2 = \overline{AS}^2 + \overline{DS}^2$. Donc $\overline{AD}^2 - \overline{DS}^2 = \overline{AS}^2$; ou (en ſubſtituant les nombres à la place des lignes AD,

AD, DS) 16 — 4 = AS = 12. Donc AS = $\sqrt{12}$ perches quarrées.

Pour avoir la valeur de AS très-rapprochée, réduiſez 12 perches quarrées en 559872 pouces quarrés, dont la racine quarrée = 748 pouces courans, valeur de AS, qui exprime la véritable largeur du verger incliné ABCD. Multipliant donc la longueur AB = 8 perches ou 1728 pouces, par la largeur 748, le produit 1292544 donnera en pouces quarrés la ſurface du verger; & rappellant ce dernier nombre à de plus grandes meſures, on trouvera que le terrein ABCD qui contiendroit 32 perches quarrées, s'il n'avoit aucune pente, ne pourra être évalué que ſur le pied de 27 perches, 6 toiſes, 12 pieds quarrés, lorſqu'il ſera incliné de 30 degrés à l'horiſon (*a*).

(*a*) Ceci eſt ſurtout à conſidérer dans la coupe des bois; les Acheteurs ſont expoſés à les payer beaucoup plus qu'ils ne croient, principalement le *bois taillis*, qui ſe vend ſuivant l'étendue du terrein qu'il occupe.

Il faut donc ſavoir que l'on diſtingue deux ſortes de bois; *bois de haute futaie* & *bois taillis*. Le bois de haute futaie eſt un bois que l'on a laiſſé croître en grands arbres; on ne lui donne guères ce nom avant l'âge de quarante ou cinquante ans, il y en a qui ont cent ans, & même deux cens; dans les ventes on ne ſauroit tromper les Acheteurs ſur la quantité de ce bois, parce que les arbres de haute futaie ſe comptent facilement.

Le bois taillis eſt fort différent; c'eſt un bois menu & qui n'eſt pour ainſi dire qu'en branches, à cauſe qu'on ne lui donne pas le temps de parvenir à un accroiſſement où il puiſſe mériter le nom d'arbres; la coupe s'en fait ordinairement de neuf en neuf ans; comme il n'eſt pas poſſible de compter toutes les branches qui entrent dans un lot que l'on met en vente, le bois taillis ſe vend à l'arpent; c'eſt-à-dire, que l'on détermine une certaine étendue de terrein pour vendre le bois qui eſt deſſus.

Or, en ſuppoſant que les différentes portions de ce terrein ſoient également favorables aux bois, on voit combien il eſt important de ſe rendre attentif aux pentes, aux creux, aux inégalités dont il eſt coupé. Car ſi les Arpenteurs ont égard aux pentes ou aux creux, il eſt certain que les Acheteurs ſeront trompés; puiſque, à ſurface égale, il croîtra néceſſairement plus d'arbres ſur un terrein horiſontal ou de niveau, que ſur un terrein incliné, ainſi que je l'ai démontré dans l'obſervation du n°. 208.

Pour mesurer un côteau, il est donc nécessaire de connoître la largeur du plan horisontal qui lui répond; cependant, comme ce plan s'étend sous le côteau jusqu'à la rencontre des perpendiculaires que l'on supposeroit abaissées du sommet de ce côteau, il ne paroît pas aisé de connoître cette largeur: néanmoins le moyen est si simple, qu'on va le comprendre à la seule exposition.

## PROBLÊME XCIII.

209. Trouver la largeur AS du plan horisontal ABOS, par lequel on doit mesurer le côteau ABCD (*fig.* 56.).

## RÉSOLUTION.

Voyez la figure 58, dans laquelle AS représente la largeur du plan qui répond à la pente DA. Sur le sommet D du côteau placez horisontalement une grande équerre DLG, dont les branches DL, LG soient d'une grandeur connue. Faites successivement la même opération aux points G, O, en marchant sur la même ligne DGOA: les trois longueurs DL, GP, OT vous donneront la largeur AS du plan horisontal qui répond au côteau. Il y a plus, les trois lignes LG, PO, TA en mesureront la hauteur DS. Cela parle aux yeux.

210. Nous avons dit que les inégalités & la pente des terreins devoient être considérées, quand il s'agissoit de les revêtir; parce que le revêtement doit envelopper tout le terrein, qu'il en suit les creux, les convéxités, tous les contours: en ce cas on divisera la surface des collines en quarrés, en parallélogrammes ou en triangles, qui soient assez petits pour ne pas différer sensiblement de surfaces

lanes ; on les évaluera ſur le pied de véritables lans, ainſi que nous l'avons enſeigné très au long ans ce Chapitre.

211. Quand on a deux dimenſions, dont une ou outes les deux ſont compoſées de perches, de toiſes, de pieds, de pouces, &c. & qu'il s'agit de es multiplier l'une par l'autre, on a vu que l'on éduiſoit ces deux dimenſions à la plus petite eſpèce, c'eſt-à-dire, que ſi elles contenoient des perches, des toiſes & des pieds, on mettoit en pieds 'une & l'autre dimenſion, & qu'on les réduiſoit n pouces, en lignes ou en points, quand avec les erches, les toiſes, les pieds, il ſe trouvoit outre cela quelques pouces, quelques lignes ou quelques points ; que ces deux dimenſions ainſi réduites, par exemple, en pouces, ſe multiplioient l'une l'autre, & donnoient en pouces quarrés la valeur du terrein, auquel ces dimenſions appartenoient ; qu'il falloit enſuite déterminer par le ſecours de la diviſion, les perches, les toiſes ou les pieds quarrés contenus dans ces pouces quarrés.

Mais cette opération eſt d'un grand détail, elle marche très-lentement vers le réſultat que l'on cherche. Cependant les Arts tendent à l'épargne du tems. On ne veut pas ſeulement arriver, on veut arriver vîte. En conſidérant des quantités d'une autre eſpèce que celle dont nous avons fait mention juſqu'à préſent, le calcul en devient beaucoup plus expéditif : ſi avec cela la Théorie n'en eſt pas plus profonde, il doit être préféré dans la pratique ; or c'eſt ce que nous allons faire voir, en expoſant le principe & la méthode de ce calcul.

# CHAPITRE II.

## DU TOISÉ DES SURFACES.

*Méthode plus ſimple que celle dont on s'eſt ſervi dans le Chapitre précédent. Expoſition du principe de cette méthode. Application à des Exemples.*

212. EXAMINONS la figure ABCD (*fig.* 59), où nous ſuppoſerons que AB ou DC = 3 toiſes ; que DA perpendiculaire ſur AB = 1 toiſe : à cette condition le Rectangle ABCD = 3 toiſes quarrées. A la ligne AB ajoutons BF = 1 pied : le Rectangle BCOF eſt ce que l'on appelle *un pied de toiſe quarrée* ; & comme il y a 6 pieds courans dans une toiſe courante, il s'enſuit qu'une toiſe quarrée contient 6 pieds de toiſe quarrée, comme le montre plus particuliérement la toiſe quarrée ARSD, dont on a diviſé les côtés oppoſés AR, DS en pieds, afin d'avoir ſix Rectangles, dont chacun contient un pied de baſe ſur une toiſe de hauteur, ou, ce qui revient au même, un pied de hauteur ſur une toiſe de baſe. Un pied de toiſe quarrée eſt donc un Rectangle large d'un pied & long d'une toiſe. Il eſt contenu 6 fois dans une toiſe quarrée : or une toiſe quarrée contient 36 pieds quarrés ; ainſi un pied de toiſe quarrée = 6 pieds quarrés, qui ſont la ſixième partie d'une toiſe quarrée.

Prenons encore FY = 1 pouce : le Rectangle OFYX eſt *un pouce de toiſe quarrée* ; c'eſt-à-dire, une ſurface longue d'une toiſe & large d'un pouce.

Il y a 12 pouces dans un pied, & 72 pouces dans une toise. Ainsi le pied de toise quarrée contient 12 pouces de toise quarrée, & la toise quarrée = 72 pouces de toise quarrée.

De même *une ligne de toise quarrée* est un Rectangle dont la longueur = une toise, & la largeur vaut une ligne.

*Un point de toise quarrée* est aussi une surface longue d'une toise, & large d'un point.

Cette manière d'envisager les surfaces pour en calculer l'aire est très-commode; parce que la toise quarrée = 6 pieds de toise quarrée. Le pied de toise quarrée = 12 pouces de toise quarrée. Le pouce de toise quarrée = 12 lignes de la même toise, & la ligne de toise quarrée en vaut 12 points; ce qui ramène le principe du calcul des surfaces à celui des longueurs, où l'on doit être très-exercé avant d'arriver à celui-ci.

## PREMIER EXEMPLE,

*Où l'on donne la manière de toiser une surface dont la longueur contient des toises, des pieds, des pouces, & la largeur ne contient que des toises.*

213. *Supposons qu'il s'agisse de multiplier* 3 *toises*, 1 *pied*, 1 *pouce*, *par une toise.*

OPÉRATION.

| Toises. | Pieds. | Pouces. | |
|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 1 | |
| 1 | | | (A) |
| 3 | 1 | 1 | |

Disposez ces deux dimensions l'une sous l'autre comme vous le voyez en A, & commençant par les pouces, multipliez successivement 1 pouce, 1 pied, 3 toises par 1 toise; dites: 1 pouce par 1 toise = 1 pouce de toise quarrée, c'est-à-dire, suivant le principe que nous venons d'établir (n°. 212.) = un Rectangle long d'une toise & large d'un pouce; écrivez 1 sous les pouces. Ensuite: 1 toise par 1 pied = 1 pied de toise quarrée; écrivez 1 sous les pieds: enfin: 1 toise par 3 toises = 3 toises quarrées; marquez 3 sous les toises: ensorte que, par cette méthode de calcul, 3 toises, 1 pied, 1 pouce, multipliées par 1 toise, donnent 3 toises quarrées, 1 pied de toise quarrée & 1 pouce de toise quarrée. Le Problême est donc aussi-tôt résolu qu'il est proposé.

Mais en travaillant par les pieds & les pouces quarrés, on auroit mis d'abord trois toises, un pied, un pouce, en pouces, pour avoir 229 pouces: on auroit réduit pareillement une toise en 72 pouces; après cela multipliant 229 pouces par 72 pouces, dont le produit seroit 16488 pouces quarrés, il faudroit diviser ce produit par 5184, afin d'avoir les toises quarrées contenues dans 16488, à cause que la toise quarrée = 5184 pouces quarrés: cette division donneroit 3 toises quarrées au quotient; il resteroit encore 936 pouces quarrés que l'on réduiroit en pieds quarrés, en divisant 936 par 144; parce que le pied quarré = 144 pouces quarrés, on trouveroit au quotient 6 pieds quarrés = 1 pied de toise quarrée, & 72 pouces quarrés de reste = 1 pouce de toise quarrée: calcul énorme en comparaison du précédent, qui s'est trouvé fait dès-là qu'il a été proposé.

C'est pourquoi nous allons continuer à calculer l'aire des surfaces sur le principe du n°. 212. en parcourant les différens cas qui pourroient apporter quelque embarras aux Commençans.

## DEUXIÈME EXEMPLE.

### *Semblable au premier.*

214. *On propoſe de multiplier* 10 *toiſes*, 4 *pieds*, 8 *pouces par* 5 *toiſes.*

OPÉRATION.

| Toiſes. | Pieds. | Pouces. |
|---|---|---|
| 10 | 4 | 8 |
| 5 | | |
| 53 | 5 | 4 |

Diſpoſez ces deux dimenſions, comme vous avez fait au premier Exemple; après quoi vous multiplierez 5 toiſes par 8 pouces = 40 pouces de toiſe quarrée, parce que, ſuivant le principe du n°. 212, les pouces qui multiplient des toiſes, donnent des pouces de toiſe quarrée, dont il en faut 12 pour un pied de toiſe quarrée. Poſez donc 4 ſous les pouces; & retenant 3 pieds de toiſe quarrée, vous direz: 5 toiſes par 4 pieds = 20 pieds de toiſe quarrée, leſquels ajoutés aux 3 pieds que l'on a retenus, donnent 23 pieds de toiſe quarrée, qui valent 3 toiſes quarrées, & 5 pieds de toiſe quarrée; vous poſerez donc 5 ſous la colonne des pieds, & vous retiendrez 3 toiſes quarrées pour la colonne ſuivante, où multipliant 5 toiſes par 10 toiſes, vous aurez 50 toiſes quarrées, auxquelles vous ajouterez les 3 toiſes de la colonne précédente, pour avoir en tout 53 toiſes quarrées, 5 pieds de toiſe quarrée & 4 pouces de la même toiſe.

## TROISIÈME EXEMPLE.

215. *Pour multiplier 59 toises, 2 pieds, 7 pouces, par 75 toises.*

OPÉRATION.

| | Toises. | Pieds. | Pouces. | |
|---|---|---|---|---|
| | 59 | 2 | 7 | |
| | 75 | | | |
| | 295 | | | |
| | 413. | | | (B) |
| Pour 2 pieds | 25 | | | |
| Pour 6 pouces | 6 | 1 | 6 | |
| Pour 1 pouce | 1 | 0 | 3 | |
| | 4457 | 1 | 9 | |

On commencera par multiplier 59 toises par 75 toises, ainsi qu'il est éxécuté en B : car si l'on multiplioit, comme dans les Exemples précédens, 7 pouces par 75 toises, on auroit besoin de la division pour réduire en pieds le grand nombre de pouces qui proviendroient de cette multiplication ; ce que l'on doit toujours éviter.

Cette première Opération étant faite, il s'agit de multiplier 2 pieds par 75 toises : pour cela considérez que si les 2 pieds valoient 1 toise, vous auriez 75 toises quarrées ; mais 2 pieds ne sont que le tiers d'une toise ; vous ne prendrez donc que le tiers de 75 = 25 toises, que vous écrirez sous la colonne des toises. Il reste à multiplier 7 pouces par 75 toises. Prenons d'abord la valeur de 6 pouces, nous prendrons ensuite celle de 1 pouce : or 6 pouces sont le quart de deux pieds ; mais 2 pieds multipliés par 75 ont donné 25 toises quarrées, par conséquent le quart de 2 pieds ou 6 pouces multipliés par 75 toises produiront le quart de 25 toi-

ſes quarrées ; vous direz donc : le quart de 25 toiſes quarrées = 6 toiſes quarrées, que vous poſerez au rang des toiſes quarrées ; mais il reſte 1 toiſe quarrée qui vaut 6 pieds de toiſe quarrée : vous prendrez le quart de 6 = 1 pied de toiſe quarrée ; vous écrirez 1 ſous la colonne des pieds : il reſte encore 2 pieds de toiſe quarrée = 24 pouces, dont le quart = 6 pouces de toiſe quarrée ; vous marquerez 6 ſous la colonne des pouces.

Enfin vous multiplierez 75 toiſes par 1 pouce, pour avoir 75 pouces de toiſe quarrée = 1 toiſe quarrée, & 3 pouces de toiſe quarrée : écrivez 1 au rang des toiſes, & 3 ſous les pouces. Après cela, faiſant l'addition de ces différens produits, vous trouverez que leur ſomme = 4457 toiſes, 1 pied, 9 pouces de toiſe quarrée.

## QUATRIÈME EXEMPLE.

216. *On demande le produit de* 45 *toiſes*, 5 *pieds*, 11 *pouces*, 9 *lignes*, *par* 34 *toiſes.*

OPÉRATION.

| | Toiſes. | Pieds. | Pouces. | Lignes. | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 45 | 5 | 11 | 9 | |
| | 34 | | | | (C) |
| | 180 | 0 | 0 | 0 | |
| | 135, | | | | |
| Pour 3 pieds | 17 | 0 | 0 | 0 | |
| Pour 2 pieds | 11 | 2 | 0 | 0 | |
| Pour 6 pouces | 2 | 5 | 0 | 0 | |
| Pour 3 pouces | 1 | 2 | 6 | 0 | |
| Pour 2 pouces | | 5 | 8 | 0 | |
| Pour 6 lignes | | 1 | 5 | 0 | |
| Pour 3 lignes | | | 8 | 6 | |
| | 1563 | 5 | 3 | 6 | |

Après les avoir disposées, comme elles le sont en C, on multipliera d'abord 45 toises par 34 toises.

Après quoi l'on passera à la multiplication de 5 pieds par 34 toises ; & afin que cette Opération cause moins d'embarras, on considérera 5 pieds comme 3 pieds, & 2 pieds, dont le premier nombre est la moitié d'une toise, & le second en est le tiers. Faites donc ce raisonnement : si 3 pieds étoient 1 toise, 3 pieds multipliés par 34 toises donneroient 34 toises quarrées ; mais trois pieds ne sont que la moitié d'une toise ; on prendra donc la moitié de 34 = 17 toises quarrées, que l'on écrira au rang des toises. Par la même raison deux pieds n'étant que le tiers d'une toise, il ne faudra prendre que le tiers de 34 toises pour le produit de 2 pieds par 34 toises ; ainsi l'on dira : le tiers de 34 = 11 toises quarrés, & il reste une toise, dont le tiers = 2 pieds de toise quarrée ; écrivez donc 11 toises sous les toises, & 2 pieds sous les pieds.

Il s'agit présentement de multiplier 11 pouces par 34 toises. Soit donc, pour la commodité du calcul, le nombre 11 coupé en 6, 3, 2 ; prenons d'abord pour 6 pouces, qui sont le quart de deux pieds : or deux pieds multipliés par 34 toises ont produit 11 toises 2 pieds ; ainsi le produit de 6 pouces par 34 toises doit être le quart de 11 toises 2 pieds = 2 toises 5 pieds, que l'on trouve en disant : le quart de 11 = 2 toises ; il reste 3 toises = 18 pieds, lesquels ajoutés à 2 = 20 pieds, dont le quart = 5 pieds de toise quarrée.

Pour 3 pouces on prendra la moitié de la valeur de 6 pouces : or 6 pouces par 34 toises viennent de nous donner 2 toises, 5 pieds ; ainsi 3 pouces par 34 toises donneront la moitié de 2 toises, 5 pieds = 1 toise, 2 pieds, 6 pouces, que vous écrirez dans le rang qui convient à chaque espèce de quantité.

Il reſte encore 2 pouces à multiplier par 34 toiſes; & comme 2 pouces ſont le tiers de 6 pouces, on prendra le tiers du produit de 6 pouces par 34 toiſes, c'eſt-à-dire, le tiers de 2 toiſes, 5 pieds, en diſant: le tiers de 2 n'eſt point; on mettra les 2 toiſes en pieds, & l'on aura 12 pieds, leſquels ajoutés à 5 = 17 pieds, dont le tiers = 5 pieds: il reſte 2 pieds = 24 pouces, dont le tiers = 8 pouces de toiſe quarrée, que vous écrirez en place convenable.

Paſſons à la multiplication de 9 lignes par 34 toiſes, & conſidérons que 9 lignes = 6 lignes & 3 lignes; mais 6 lignes ſont le quart de 2 pouces: prenons donc le quart de la valeur de 2 pouces que nous avons trouvée de 5 pieds 8 pouces; diſons donc: le quart de 5 pieds eſt 1 pied; il reſte 1 pied = 12 pouces, leſquels ajoutés à 8 pouces = 20 pouces, dont le quart = 5 pouces de toiſe quarrée; de ſorte que le produit de 34 toiſes par 6 lignes eſt 1 pied, 5 pouces de toiſe quarrée: on écrira 1 au rang des pieds, & 5 ſous la colonne des pouces.

Enfin on prendra pour le produit de 3 lignes par 34 toiſes, la moitié du produit de 6 lignes par 34 toiſes que l'on vient de trouver = 1 pied 5 pouces de toiſe quarrée; ainſi l'on dira: la moitié de 1 n'eſt point; on mettra le pied en 12 pouces, leſquels ajoutés à 5 = 17 pouces, dont la moitié = 8 pouces: il reſte 1 pouce = 12 lignes, dont la moitié eſt 6 lignes. Le produit de 3 lignes par 34 toiſes eſt donc 8 pouces, 6 lignes de toiſe quarrée. On écrira ce produit ſous les colonnes qui lui conviennent, & faiſant l'addition de tous les produits que l'on a trouvés ſucceſſivement, on voit que 45 toiſes, 5 pieds, 11 pouces, 9 lignes, multipliées par 34 toiſes, donnent 1563 toiſes, 5 pieds, 3 pouces, 6 lignes de toiſe quarrée.

## CINQUIÈME EXEMPLE.

217. *Quel eſt le produit de* 15 *toiſes*, 5 *pouces*, *par* 18 *toiſes.*

OPÉRATION.

| | Toiſes. | Pieds. | Pouces. |
|---|---|---|---|
| | 15 | 0 | 5 |
| | 18 | | |
| | 120. | | |
| | 15. | | |
| Pour 1 pied | 4 | 0 | 0 |
| Pour 4 pouces | 1 | 0 | 0 |
| Pour 1 pouce | . | 1 | 6 |
| | 271 | 1 | 6 |

Ayant multiplié à l'ordinaire 15 toiſes par 18 toiſes, il s'agit de multiplier 5 pouces par 18 toiſes. Pour y parvenir plus facilement, nous ſuppoſerons que 5 pouces ſoient 1 pied, & nous dirons: 18 toiſes multipliées par une toiſe donneroient 18 toiſes quarrées; mais 1 pied n'eſt que la ſixième partie de 1 toiſe; donc 18 toiſes multipliées par 1 pied produiront le ſixième de 18 toiſes quarrées = 3 toiſes quarrées: vous écrirez 3, ſur lequel vous tirerez un trait, parce que ce nombre ne doit point entrer dans l'addition des produits que nous cherchons; ſon uſage eſt de faire trouver plus commodément le produit de 5 pouces par 18 toiſes; mais 5 pouces valent 4 pouces & 1 pouce. Or 4 pouces ſont le tiers de 1 pied; par conſéquent le produit de 4 pouces par 18 toiſes n'eſt que le tiers du produit de 1 pied par 18 toiſes: nous avons vû que ce dernier produit étoit 3 toiſes quarrées; vous direz donc: le tiers de 3 = 1: écrivez 1 ſous la colonne des toiſes.

Il reſte à trouver la valeur de 1 pouces par 18 toi-

ſes ; mais 1 pouce eſt le quart de 4 pouces ; prenez donc le quart de la valeur de 4 pouces, en diſant : le quart de 1 n'eſt point ; mais une toiſe = 6 pieds, dont le quart = 1 pied ; il reſte 2 pieds = 24 pouces, dont le quart = 6 pouces de toiſe quarrée ; de ſorte que le produit de 18 toiſes par 1 pouce = 1 pied & 6 pouces de toiſe quarrée. Marquez 1 ſous la colonne des pieds, & 6 ſous celle des pouces : faites enfin l'addition des différens produits que vous venez de trouver ; vous aurez 271 toiſes, 1 pied, 6 pouces de toiſe quarrée, pour le produit de 15 toiſes, 5 pouces, par 18 toiſes.

## SIXIÈME EXEMPLE.

218. *Déterminer le produit de 25 toiſes, 3 pieds, 8 lignes, par 32 toiſes.*

OPÉRATION.

| | Toiſes. | Pieds. | Pouces. | Lignes. |
|---|---|---|---|---|
| | 25 | 3 | 0 | 8 |
| | 32 | | | |
| | 50 | | | |
| | 75. | | | |
| Pour 3 pieds | 16 | | | |
| Pour 1 pied | 8 | 6 | | |
| Pour 1 pouce | | 6 | 8 | |
| Pour 6 lignes | | 1 | 4 | |
| Pour 2 lignes | | | 5 | 4 |
| | 816 | 1 | 9 | 4 |

Commencez par multiplier 25 toiſes par 32 toiſes : cette Opération étant finie, vous chercherez le produit de 3 pieds par 32 toiſes, en obſervant que 1 toiſe multipliée par 32 toiſes produiront 32 toiſes quarrées : or 3 pieds ne ſont que la moitié d'une toi-

ſe; ainſi 3 pieds multipliés par 32 toiſes = 16 toiſes quarrées. Ecrivez donc 16 ſous les toiſes.

Il faut maintenant trouver le produit de 8 lignes par 32 toiſes: cherchons d'abord celui de 1 pied pour avoir le produit de 1 pouce, d'où nous tirerons celui de 8 lignes; mais puiſque le produit de 3 pieds = 16 toiſes quarrées, celui de 1 pied ſera le tiers de 16 toiſes = 5 toiſes, & il reſte 1 toiſe = 6 pieds, dont le tiers = 2 pieds; écrivez donc 5 toiſes, 2 pieds, que vous couperez par un trait. Prenons encore le produit de 1 pouce: c'eſt le douzième de 1 pied; diſons donc: le douzième de 5 toiſes n'eſt point; mais 5 toiſes quarrées = 30 pieds de toiſe quarrée, leſquels ajoutés à 2, font 32 pieds de toiſe quarrée, dont le douzième = 2 pieds, & il reſte 8 pieds = 96 pouces, dont le douzième = 8 pouces de toiſe quarrée. Ecrivez 2 pieds, 8 pouces, que vous couperez encore d'un trait; parce que ce produit, comme le précédent, n'eſt ſuppoſé que pour arriver plus facilement à celui de 32 toiſes par 8 lignes, qu'il nous faut à préſent déterminer.

Prenons pour 6 lignes: c'eſt la moitié du produit de 1 pouce; on aura donc 1 pied, 4 pouces: écrivons 1 ſous les pieds, & 4 ſous les pouces; il reſte encore à trouver le produit de 2 lignes, c'eſt-à-dire, le tiers de 6 lignes; il faut donc prendre le tiers de 1 pied 4 pouces = 5 pouces, 4 lignes. Après cela, faiſant l'addition ce tous ces produits, on trouvera que 25 toiſes, 3 pieds, 8 lignes, multipliées par 32 toiſes, donnent 816 toiſes, 1 pied, 9 pouces, 4 lignes.

## SEPTIÈME EXEMPLE.

219. *Trouver le produit de* 13 *toiſes*, 5 *lignes*, *par* 19 *toiſes.*

OPÉRATION.

| | Toiſes. | Pieds. | Pouces. | Lignes. |
|---|---|---|---|---|
| | 13 | 0 | 0 | 5 |
| | 19 | | | |
| | 117 | | | |
| | 13. | | | |
| Pour 1 pied | 4 | 1 | | |
| Pour 1 pouce | | 1 | 1 | |
| Pour 4 lignes | | | 6 | 4 |
| Pour 1 ligne | | | 1 | 7 |
| | 247 | 0 | 7 | 11 |

On multipliera à l'ordinaire 13 toiſes par 19 toiſes; après quoi on aura à multiplier 5 lignes par 19 toiſes; mais auparavant on ſuppoſera le produit de 1 pied, & celui de 1 pouce, pour en déduire avec plus de facilité celui de 5 lignes: or 1 pied par 19 toiſes = 3 toiſes, 1 pied, que vous couperez d'un trait. Prenons encore le produit de 1 pouce: c'eſt le douzième de 1 pied. Diſons donc: le douzième de 3 toiſes n'eſt point; mettant les 3 toiſes en pieds, auxquels nous ajouterons 1, nous aurons 19 pieds, dont le douzième = 1 pied de toiſe quarrée; il reſte 7 pieds = 84 pouces, dont la douzième partie = 7 pouces de toiſe quarrée: écrivons 1 ſous les pieds, & 7 ſous les pouces, ſur leſquels nous tirerons un trait. Il n'eſt pas difficile à préſent d'avoir le produit de 5 lignes par 19 toiſes: car 5 lignes = 4 lignes & 1 ligne: or 4 lignes ſont le tiers de 1 pouce; prenons le tiers de la valeur de 1 pouce que nous avons trouvé = 1 pied, 7 pouces, en diſant: le tiers de 1

pied n'eſt point; mettant ce pied en pouces, auquel on joindra 7 pouces, nous aurons 19 pouces, dont le tiers = 6 pouces, & il reſte 1 pouce = 12 lignes, dont le tiers = 4 lignes de toiſe quarrée; le produit de 4 lignes par 19 toiſes eſt donc 6 pouces, 4 lignes de toiſe quarrée; écrivons 6 ſous les pouces, & 4 ſous les lignes.

Il reſte à trouver le produit de 1 ligne par 19 toiſes: c'eſt le quart de 4 lignes; ainſi nous dirons: le quart de 6 eſt 1, & il reſte 2 pouces = 24 lignes, auxquelles ajoutant 4 lignes, on a 28 lignes, dont le quart = 7; on écrira 1 ſous les pouces, & 7 ſous les lignes. On ajoutera tous les produits que l'on vient d'écrire, & l'on trouvera que le produit de 13 toiſes, 5 lignes par 19 toiſes = 247 toiſes, 7 pouces, 11 lignes de toiſe quarrée.

## HUITIÈME EXEMPLE,

*Où les deux dimenſions qui ſe multiplient, ſont compoſées chacune de toiſes, pieds, pouces, &c.*

220. *Soit propoſé de multiplier 12 toiſes, 1 pied, 7 pouces, 5 lignes, par 5 toiſes, 2 pieds, 9 pouces.*

OPÉRATION.

| | Toiſes. | Pieds. | Pouces. | Lignes. | Points. |
|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | 1 | 7 | 5 | 0 |
| | 5 | 2 | 9 | | (M) |
| | 60 | 5 | | | |
| Pour 6 pouces | | 2 | 6 | | |
| Pour 1 pouce | | | 5 | | |
| Pour 4 lignes | | | 1 | 8 | |
| Pour 1 ligne | | | | 5 | |
| Pour 2 pieds | 4 | 0 | 6 | 5 | 8 |
| Pour 6 pouces | 1 | 0 | 1 | 7 | 5 |
| Pour 5 pouces | | 3 | 0 | 9 | $8\frac{1}{2}$ |
| | 66 | 5 | 9 | 11 | $9\frac{1}{2}$ |

Diſpoſez

Disposez ces deux dimensions comme vous le voyez en M; & sans faire d'abord attention aux 2 pieds 9 pouces, de la seconde dimension, multipliez successivement 12 toises, 1 pied, 7 pouces, 5 lignes par cinq toises, en disant: 5 fois 12 = 60 toises quarrées; écrivez 60 sous les toises; dites ensuite: 5 toises multipliées par 1 pied = 5 pieds de toise quarrée; écrivez 5 sous les pieds. Après cela, vous viendrez aux 7 pouces, que vous regarderez comme 6 pouces & 1 pouce. Vous direz donc: 6 pouces sont la moitié de 1 pied; par conséquent il faudra prendre la moitié du produit de 1 pied, & dire: la moitié de 5 pieds = 2 pieds, 6 pouces, que l'on écrira: pour chercher ensuite le produit de 1 pouce, c'est le sixieme de 6 pouces, c'est-à-dire, le sixieme de 2 pieds 6 pouces, ou de 30 pouces = 5 pouces de toise quarrée; écrivez 5 sous les pouces, & passez au produit de 5 toises par 5 lignes: or 5 lignes = 4 lignes & 1 ligne; prenez d'abord pour 4 lignes: c'est le tiers de la valeur de 1 pouce, ou le tiers de 5 pouces de toise quarrée = 1 pouce 8 lignes; en prenant encore le quart de ce dernier produit = 5 lignes de toise quarrée, on aura le produit de 5 toises par 1 ligne.

Cette premiere opération étant faite, on travaillera à trouver le produit de 12 toises, 1 pied, 7 pouces, 5 lignes, par 2 pieds; mais il est clair que si 2 pieds valoient 1 toise, le produit cherché seroit 12 toises, 1 pied, 7 pouces, 5 lignes de toise quarrée; & comme 2 pieds ne sont que le tiers d'une toise, on ne doit prendre que le tiers de 12 toises, 1 pied, 7 pouces, 5 lignes = 4 toises, 0 pied, 6 pouces, 5 lignes, 8 points de toise quarrée.

Il reste à trouver le produit de 12 toises, 1 pied, 7 pouces, 5 lignes, par 9 pouces, qui valent 6 pouces & 3 pouces. On prendra donc pour 6 pouces,

qui doivent produire le quart de la valeur de 2 pieds = 1 toise, 0 pied, 1 pouce, 7 lignes, 5 points: enfin la moitié de ce dernier produit, qui est 3 pieds, 9 lignes, 8 points $\frac{1}{2}$, donne la valeur de 3 pouces; faisant l'addition de tous les produits que l'on a trouvés, le résultat sera 66 toises, 5 pieds, 9 pouces, 11 lignes, 9 points $\frac{1}{2}$ de toise quarrée.

## NEUVIEME EXEMPLE.

221. *Trouver le produit de 39 toises, 3 pieds, 4 pouces, 9 lignes, par 7 toises, 4 pieds, 9 pouces.*

### OPÉRATION.

| Toises. | Pieds. | Pouces. | Lignes. | Points. | |
|---|---|---|---|---|---|
| 39 | 3 | 4 | 9 | 0 | |
| 7 | 4 | 9 | | | |
| 273 | | | | | |
| 3 | 3 | | | | |
| | 2 | 4 | | | |
| | | 3 | 6 | | |
| | | 1 | 9 | | |
| 276 | 5 | 9 | 3 | | Produit de 39 toises, 3 pieds, 4 pouces, 9 lignes, par 7 toises. |
| 13 | 1 | 1 | 7 | | par 2 pieds. |
| 13 | 1 | 1 | 7 | | par 2 pieds. |
| 3 | 1 | 9 | 4 | 9 | par 6 pouces. |
| 1 | 3 | 10 | 8 | 4 $\frac{1}{2}$ | par 3 pouces. |
| 308 | 1 | 8 | 6 | 1 $\frac{1}{2}$ | |

Nous allons abréger le détail de cette Opération, afin que les Commençans s'accoutument à travailler par eux-mêmes.

Sans penser aux 4 pieds, 9 pouces de la seconde dimension, on cherchera à l'ordinaire le produit de 39 toises, 3 pieds, 4 pouces, 9 lignes, par 7 toi-

fes, que l'on trouvera = 276 toiſes, 5 pieds, 9 pouces, 3 lignes. On paſſera enſuite à la recherche du produit de 39 toiſes, 3 pieds, 4 pouces, 9 lignes, par 4 pieds; en conſidérant que 4 pieds ſont les 2 tiers de 1 toiſe, on prendra les deux tiers ou deux fois un tiers de 39 toiſes, 3 pieds, 4 pouces, 9 lignes = 13 toiſes, 1 pied, 1 pouce, 7 lignes, que l'on écrira deux fois.

Enfin comme 9 pouces = 6 pouces & 3 pouces, on cherchera le produit de 6 pouces, qui eſt le quart de 2 pieds = 3 toiſes, 1 pied, 9 pouces, 4 lignes, 9 points, dont la moitié 1 toiſe, 3 pieds, 10 pouces, 8 lignes, 4 points $\frac{1}{2}$, eſt le produit de 3 pouces. Enfin la ſomme totale eſt 308 toiſes, 1 pied, 8 pouces, 6 lignes, 1 point $\frac{1}{2}$.

## DIXIEME EXEMPLE.

222. *On demande quel eſt le produit de 16 toiſes, 2 pieds, 7 pouces, 3 lignes, par 8 toiſes, 2 pouces, 4 lignes.*

### OPÉRATION.

| Toiſes. | Pieds. | Pouces. | Lignes. | Points. |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 2 | 7 | 3 | 0 |
| 8 | 0 | 2 | 4 | |
| 128 | | | | |
| 2 | 4 | | | |
| 0 | 4 | | | |
| | 0 | 8 | | |
| | | 2 | | |
| | | | | |
| 0 | 2 | 8 | 10 | 5 |
| | 0 | 5 | 5 | 8 $\frac{1}{2}$ |
| 132 | 0 | 0 | 4 | 1 $\frac{1}{2}$ |

On multipliera d'abord 16 toiſes, 2 pieds, 7 pouces, 3 lignes, par 8 toiſes, ainſi qu'on l'a déja pratiqué tant de fois. Après cela, on cherchera le produit de cette premiere dimenſion par 2 pouces; ce que l'on exécutera plus commodément, en ſuppoſant le produit de 1 pied = 2 toiſes, 4 pieds, 5 pouces, 2 lignes, 6 points, ſur leſquels on tirera un trait, afin qu'on ne les faſſe pas entrer dans le réſultat des différens produits; & comme 2 pouces ſont le ſixieme de 1 pied, on prendra la ſixieme partie de la valeur de 1 pied = 2 pieds, 8 pouces, 10 lignes, 5 points.

Il reſte à trouver la valeur de 4 lignes, qui ſont un ſixieme de 2 pouces = 5 pouces, 5 lignes, 8 points & $\frac{5}{6}$ de point de toiſe quarrée: on fera la ſomme de tous les produits trouvés; elle ſera 132 toiſes, 4 lignes, 1 point $\frac{1}{6}$.

## ONZIEME EXEMPLE.

223. *Déterminer le produit de 24 toiſes, 2 pouces, 6 lignes, par 20 toiſes, 4 lignes.*

### OPÉRATION.

| Toiſes. | Pieds. | Pouces. | Lignes. | Points. | |
|---|---|---|---|---|---|
| 24 | 0 | 2 | 6 | 0 | (C) |
| 20 | 0 | 0 | 4 | | |
| 480 | 3 | 4 | 0 | | |
| . | . | 10 | | | |
| 4 | 0 | 0 | 8 | | |
| | 2 | 0 | 0 | 8 | |
| | | 8 | 0 | 1 $\frac{2}{3}$ | |
| 480 | 4 | 10 | 0 | 1 $\frac{1}{3}$ | |

Après avoir disposé les termes, comme ils le sont en C, on multipliera tous les termes de la premiere dimension par les 20 toises de la seconde, en disant: 24 fois 20 = 480 toises; & au lieu de supposer le produit de 1 pied par 20 toises, afin d'avoir celui de deux pouces, ainsi que nous l'avons pratiqué ci-devant, on dira tout d'un coup: 20 toises multipliées par 2 pouces = 40 pouces de toise quarrée = 3 pieds, 4 pouces; on écrira 3 pieds, 4 pouces: après quoi, 6 lignes multipliées par 20 toises = 120 lignes de toise quarrée = 10 pouces.

Il s'agira ensuite de multiplier 24 toises, 2 pouces, 6 lignes, par 4 lignes: pour cela, on supposera le produit de la premiere dimension par 1 pied, d'où l'on déduira celui de 1 pouce, pour avoir le produit de 4 lignes. Le produit de 1 pied = 4 toises, 5 lignes; & celui de 1 pouce = 2 pieds, 5 points: on coupera d'un trait ces deux produits, & l'on prendra le tiers du dernier = 8 pouces, 1 point, & $\frac{2}{3}$ de point pour la valeur de 4 lignes; & le produit total sera 480 toises, 4 pieds, 10 pouces, 1 point, & $\frac{2}{3}$ de point.

224. Nous ne croyons pas qu'il soit besoin d'un plus grand nombre d'Exemples: tous les cas un peu embarrassans ont été proposés & détaillés avec soin. On a laissé dans quelques-uns quelque chose à faire aux Commençans. En général même, lorsqu'ils seront un peu exercés au calcul du toisé, nous leur conseillons de travailler sur nos Exemples, sans lire le détail dont nous les avons accompagnés; en comparant leur résultat au nôtre, ils auront un moyen de s'assurer de la justesse de leur calcul.

Mais comme il est utile de vérifier ses Opérations, on ne doit pas ignorer les moyens d'y parvenir. Le plus simple est de recommencer; il n'est pourtant pas rare de faire la même faute au même

endroit : c'eſt pourquoi il vaut mieux changer le point de vue, doubler, par exemple, la premiere ou la ſeconde dimenſion, & prendre la moitié de l'autre ; les multiplier enſuite à l'ordinaire : le produit qui en réſultera, doit être égal à celui que l'on avoit avant le changement. L'application de ce procédé à un ſeul Exemple, ne laiſſera rien à deſirer.

## DOUZIEME EXEMPLE,

*Où l'on expoſe un moyen très ſimple de vérifier un Calcul.*

225. Prenons l'Exemple précédent, où nous avons trouvé que le produit de 24 toiſes, 2 pouces, 6 lignes, par 20 toiſes, 4 lignes, étoit 480 toiſes, 4 pieds, 10 pouces, 1 point, & $\frac{2}{3}$ de point de toiſe quarrée. Doublons la premiere dimenſion : elle deviendra 48 toiſes, 5 pouces ; & la moitié de la ſeconde ſera 10 toiſes, 2 lignes : multipliant donc 48 toiſes, 5 pouces, par 10 toiſes, 2 lignes, nous devons retrouver 480 toiſes, 4 pieds, 10 pouces, 1 point & $\frac{2}{3}$, comme ſi l'on n'avoit fait aucun changement. Faiſons le calcul.

OPÉRATION.

| Toiſes. | Pieds. | Pouces. | Lignes. | Points. |
|---|---|---|---|---|
| 48 | 0 | 5 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 2 | |
| 480 | 4 | 2 | | |
| 8 | 0 | 12 | | |
| | 4 | 0 | 0 | 12 |
| | | 8 | 0 | 1 $\frac{2}{3}$ |
| 480 | 4 | 10 | 0 | 1 $\frac{2}{3}$ |

48 toiſes multipliées par 10 toiſes = 480 toiſes quarrées. Enſuite 5 pouces par 10 toiſes = 50 pouces de toiſe quarrée = 4 pieds 2 pouces. Pour avoir le produit de 48 toiſes, 5 pouces par 2 lignes, on prendra celui de 1 pied = 8 toiſes, 10 lignes. Celui de 1 pouce vaut 4 pieds, 10 points de toiſe quarrée. On coupera d'un trait ces deux produits, & on prendra la ſixieme partie du dernier = 8 pouces, 1 point $\frac{2}{3}$ pour la valeur de 2 lignes. On cherchera le produit total, & l'on retrouvera, comme dans l'Exemple précédent, 480 toiſes, 4 pieds, 10 pouces, 1 point & $\frac{2}{3}$.

## DÉMONSTRATION.

Prenons un cas très ſimple. Suppoſons que l'on ait 6 à multiplier par 4; il s'agit de prouver qu'en multipliant la moitié 3 du premier nombre par le double 8 du ſecond, on aura préciſément le même produit 24, que l'on auroit eu ſans faire aucun changement: cela eſt aſſez évident; car ſi vous n'avez pris que la moitié du premier nombre, par compenſation vous l'avez multiplié par une quantité double: vous rétabliſſez d'un côté ce que vous avez détruit de l'autre; ainſi le même effet ſubſiſte; C. Q. F. D.

Quand on ſait l'art d'évaluer les terreins, il eſt ſi facile d'en faire le partage, que nous ne ſaurions nous diſpenſer d'entretenir les Commençans ſur différens Problêmes qui y ont rapport. Il en réſulte une double utilité: l'eſprit s'exerce, il s'affermit ſur ſes principes, il étend ſes vues en même tems qu'il travaille pour ſon propre intérêt. Quoiqu'il y ait des hommes chargés par leur profeſſion de partager les fonds de terre, ſuivant les différentes conditions établies dans chaque Etat, on s'abuſeroit étrangement de penſer que cela eſt ſuffiſant. Tel qui ſe charge

d'une opération, ſe charge encore plus ſouvent d'y commettre des fautes; que ce ſoit mauvaiſe foi ou ignorance, l'expérience ne le prouve que trop.

Mais on remarque auſſi que ceux qui ont la réputation d'être éclairés, ceux principalement qui le ſont en effet, ſont moins expoſés aux fraudes des autres hommes: nous allons donc expoſer la maniere la plus ſimple de faire le partage d'un Terrein en tant de parties égales que l'on voudra.

# CHAPITRE III.

## *Du partage des Terreins.*

226. Les Terreins dont le partage ſe préſente à faire ſont des Parallélogrammes, des Trapèſes, des Triangles, des Polygones réguliers, ou toute autre figure qui n'a aucune régularité. Nous allons réſoudre ces différens cas, en ſuppoſant d'abord que nous puiſſions commencer la diviſion de ces terreins par où l'opération nous paroîtra la plus commode: quand il faudra partir d'un point donné, nous produirons un moyen fort ſimple de réſoudre cette difficulté.

## PROBLÊME XCIV.

227. Diviſer un Triangle ABC en autant de parties égales qu'il eſt néceſſaire. (*fig.* 60.)

## RÉSOLUTION.

En prenant AC pour la baſe de ce Triangle, diviſez cette baſe en autant de parties égales qu'on le demande, par exemple, en 5; (cette diviſion ſe fait ſur le terrein, en toiſant la baſe AC, qui contient, ſi l'on veut, 60 toiſes, dont la cinquiéme partie = 12 toiſes, que l'on portera 5 fois ſur AC de A en 1, de 1 en 2, &c.) après quoi de l'angle oppoſé B, tirant les lignes B 1, B 2, &c. le Triangle ABC ſe trouvera diviſé en 5 Triangles égaux en ſurface.

## DÉMONSTRATION.

Tous ces Triangles s'étendent juſqu'au point *B*; ils ont par conſéquent même hauteur : on a fait d'ailleurs leurs baſes égales ; ils ſont donc égaux en ſurface ; (n°. 171.) C. Q. F. D.

## PROBLÊME XCV.

228. Partager le Parallélogramme A B C D en 4 parties égales, ou en tout autre nombre de parties égales qu'il en ſera beſoin. (*fig.* 61.)

## RÉSOLUTION.

Diviſez, comme ci devant, les côtés A B, D C oppoſés, chacun en 4 parties égales, ou en 8, 10, 12, &c. ſi on le demande. Tirez les lignes 11, 22, 33; elles diviſeront le Parallélogramme A B C D en 4 Parallélogrammes égaux.

## DÉMONSTRATION.

Par la conſtruction, ces Parallélogrammes ont des baſes égales, ils ſont poſés entre les mêmes paralleles A B, D C; il eſt donc néceſſaire qu'ils ſoient égaux (n°. 170.); ainſi le Parallélogramme A B C D eſt diviſé comme on le demande; C. Q F. D.

## PROBLÊME XCVI.

229. Diviſer en tant de parties égales que l'on voudra un Trapèſe A B C D, dont les deux côtés A B, D C ſont paralleles. (*fig.* 62.)

## RÉSOLUTION.

Diviſez les deux côtés A B, C D paralleles, chacun en 3 parties égales, ſi on le demande. Aux points 1, 2, tirez les lignes 11, 22; le grand

Trapèſe ſe trouvera diviſé en 3 autres Trapèſes égaux en ſurface.

## DÉMONSTRATION.

En traçant les lignes ponctuées A 1, 1 2, 2 C, on peut remarquer que le Trapèſe A D 1 1 contient deux Triangles 1 D A, 1 A 1, égaux aux deux Triangles 2 1 1, 2 1 2, chacun à chacun, qui compoſent le Trapèſe 1 1 2 2 : car le Triangle 1 D A = le Triangle 2 1 1, de même baſe & de même hauteur (conſt.) ; & le Triangle 1 A 1 = le Triangle 2 1 2, par la même raiſon : ainſi le Trapèſe A D 1 1 = le Trapèſe 1 1 2 2.

On prouvera de même que le Trapèſe 2 B C 2 = le Trapèſe 1 1 2 2 ; & par conſéquent que le grand Trapèſe A B C D eſt diviſé en trois parties égales ; C. Q. F. D.

## PROBLÊME XCVII.

230. Partager un Polygone régulier, par exemple, un Pentagone A B C D E, en 9 parties égales ; ce qui peut ſervir de modele pour le diviſer en tant de parties égales que l'on voudra. (*fig. 63.*)

## RÉSOLUTION.

Puiſque l'on demande que le Pentagone régulier ſoit diviſé en 9 parties égales, il eſt clair qu'en diviſant chacun de ſes côtés en 9 parties égales, ſi l'on tiroit des lignes de chaque point de diviſion à ſon centre O, comme on l'a exécuté ſur le côté A B, le Polygone ſe trouveroit diviſé en 45 Triangles égaux, à cauſe qu'ils auroient même baſe & même hauteur ; mais le neuviéme de 45 = 5 ; par conſéquent il faut que les lignes O A, O G, ou O G, O M, &c. renferment entr'elles 5 diviſions priſes de ſuite ſur les côtés du Polygone : or c'eſt ce que

l'on a pratiqué ſur le Pentagone régulier ABCDE; ce Polygone eſt donc exactement diviſé en 9 parties égales, ce qui n'a pas beſoin d'autre démonſtration que le procédé même.

231. En général, pour diviſer la ſurface d'un Polygone régulier en autant de parties égales que l'on voudra, on diviſera chaque côté du Polygone en ce nombre de parties, & l'on tirera des lignes du centre de ce Polygone, telles que priſes deux à deux de ſuite, elles renferment autant de diviſions que le Polygone a de côtés. Si l'on propoſoit, par exemple, de partager un Décagone régulier en 15 parties égales, on diviſeroit chaque côté de ce Polygone en 15 parties égales, (le Polygone étant régulier, la diviſion d'un ſeul côté ſuffiroit à celle des autres) & l'on renfermeroit 10 diviſions entre deux lignes tirées du centre aux côtés de ce Polygone. Tout cela eſt ſi ſimple, que, pour en avoir l'évidence, la ſeule conſtruction eſt plus que ſuffiſante; on ne doit pourtant pas négliger de la faire exécuter aux jeunes gens, afin qu'ils s'accoutument à voir dans une figure tout ce qui y eſt contenu.

232. On eſt quelquefois obligé de commencer le partage d'un Terrein par un point déterminé, auquel doivent ſe réunir toutes les portions d'un partage: cela arrive lorſque les héritiers ſouhaitent de poſſéder en commun un puits, par exemple, dont ils voudroient avoir la jouiſſance, ſans ſortir du Terrein qui doit leur revenir; c'eſt un moyen d'éviter ce que l'on appelle *des ſervitudes*, qui conſiſtent en ce qu'un des héritiers eſt obligé de ſouffrir que les autres jouiſſent en commun de ce qui devroit lui être particulier, étant enfermé dans ſon lot.

Il n'y a rien de plus incommode que ces ſortes de ſujétions; c'eſt une ſource perpétuelle de démêlés. On rend donc un ſervice très conſidérable, lorſque

l'on trouve les moyens d'éviter cet inconvénient; ce qui n'eſt pas toujours poſſible, car les puits ſont quelquefois ſi proches des maiſons, qu'il faudroit les détruire afin d'éviter une ſervitude: remede qui ſeroit ordinairement pire que le mal. Nous ſuppoſons ici que l'on n'ait d'autre difficulté à vaincre, que celle de faire partir toutes les diviſions d'un point déterminé.

## *PRÉPARATION A LA RÉSOLUTION de ce Problême.*

233. On doit ſe rappeller que l'on détermine l'aire ou la ſurface d'un Triangle, en multipliant ſa hauteur par la moitié de ſa baſe, ou ſa baſe par la moitié de ſa hauteur.

Ainſi la ſurface & la hauteur d'un Triangle (*fig.* 64.) étant données, on a néceſſairement la longueur de ſa baſe: car ſoit l'aire du Triangle ABC = 96 toiſes quarrées, ſa hauteur BO = 8 toiſes courantes, & ſa baſe AC = $x$; on aura 96 toiſes = $BO \times \frac{AC}{2} = 8 \times \frac{x}{2} = 4x$. Ainſi $x = \frac{96}{4} = 24$ toiſes courantes: en effet, la baſe 24 toiſes multipliée par 4 toiſes, moitié de la perpendiculaire BO = 8, donne 96 toiſes quarrées pour la valeur du Triangle ABC.

On a donc un moyen très ſimple de trouver la baſe d'un Triangle, dont la ſurface & la hauteur ſont connues. C'eſt de diviſer le nombre qui exprime la ſurface du triangle, par celui qui repréſente la moitié de ſa hauteur; le quotient de cette diviſion fera connoître la longueur de la baſe de ce Triangle. Il faut ſe familiariſer avec cette vérité; elle va ſervir de principe au Problême que nous nous propoſons de réſoudre.

## PROBLÊME XCVIII.

234. Diviſer un Terrein quelconque ABCDE en autant de parties égales qu'il eſt néceſſaire, à condition que toutes les diviſions commenceront à un même point O pris au-dedans de la figure. (*fig.* 65.)

### RÉSOLUTION.

Suppoſons qu'il s'agiſſe de partager ce Terrein en 5 parties égales. On commencera par arpenter tout le Terrein, où l'on pourra trouver 3000 toiſes quarrées, dont la cinquieme partie = 600.

Après cette opération, du point O on imaginera les lignes OE, OD tirées aux angles E, D, & l'on meſurera le Triangle OED, qui pourra ne contenir que 450 toiſes quarrées: ce Triangle ſera plus petit de 150 toiſes que la cinquieme partie du Terrein à diviſer; il faudra donc prendre ſur le Triangle ODC un petit Triangle ODM, qui contienne 150 toiſes quarrées, leſquelles, ajoutées aux 450 toiſes du Triangle OED, donnent au juſte 60 toiſes quarrées, cinquieme partie du Terrein propoſé.

Pour y parvenir, du point O on abaiſſera la perpendiculaire OS ſur le côté CD: on toiſera cette perpendiculaire à laquelle je ſuppoſe 60 toiſes; ces 60 toiſes expriment la hauteur du Triangle ODM, dont nous ſavons que l'aire doit contenir 150 toiſes quarrées; mais (n°. 233.) la ſurface & la hauteur d'un Triangle étant connues, il eſt très facile de connoître la longueur de ſa baſe DM: vous n'avez qu'à diviſer le nombre 150, qui exprime en toiſes quarrées la ſurface du Triangle ODM, par 30, moitié de la hauteur de ce Trian-

gle ; le quotient 5 indiquera qu'il faut porter 5 toises de D en M, & tirer la ligne OM : car alors le Triangle ODM = 150 toises quarrées : en ajoutant la valeur de ce Triangle à celle du Triangle ODE = 450 toises, le quadrilatere OMDE contiendra 600 toises quarrées ; il ſera par conſéquent la cinquieme partie du terrein ABCDE ; C. Q. F. 1°. D.

On arpentera enſuite le Triangle OMC : s'il contient 720 toiſes quarrées, il ſera plus grand de 120 toiſes quarrées que la cinquieme partie du Terrein ABCDE ; il faudra donc retrancher du Triangle OMC le petit Triangle ORC, qui contienne 120 toiſes quarrées : or ce petit Triangle a pour hauteur la perpendiculaire OS que nous avons ſuppoſée = 60 toiſes ; ainſi (n°. 233.) diviſant 120 par 30, moitié de la perpendiculaire OS, le quotient 4 exprimera la longueur que l'on doit donner à la baſe du Triangle ORC, dont l'aire = 120 toiſes quarrées, & la hauteur = 60 toiſes courantes : on portera donc quatre toiſes de C en R, où tirant la ligne OR, le Triangle OMR = 600 toiſes quarrées, & ſera par conſéquent au juſte la cinquieme partie du Terrein ABCDE ; puiſque le Triangle OMR = le Triangle OMC moins le Triangle ORC ; c'eſt-à-dire, 720 — 120 toiſes = 600 toiſes ; C. Q. F. 2°. D.

Vous continuerez par cette méthode de chercher la cinquieme partie du Terrein ABCDE, en prenant ſur le Triangle COB un Triangle CON, lequel, ajouté au Triangle COR, donne 600 toiſes quarrées : vous prendrez enſuite ſur le Triangle BOA le Triangle BOG, qui produiſe 600 toiſes quarrées, étant joint au Triangle BON ; & par ce moyen les trois quadrilateres ORCN, ONBG, OGAE ſeront la cinquieme partie du Terrein

ABCDE; on aura donc diviſé ce Terrein en autant de parties égales qu'on le demandoit; C. Q. F. D.

235. L'opération que nous venons de décrire, ne ſauroit s'exécuter ſur un terrein qui ne permettroit pas que l'on y meſurât les triangles que nous y avons formés: c'eſt pourquoi, s'il s'agiſſoit de faire le partage d'un bois, on en lèveroit le plan (n°. 196), ſur lequel on feroit le partage dont on a beſoin; & rapportant ſur le contour du terrein les diviſions trouvées ſur le circuit du plan, on auroit tous les points qui détermineroient le partage.

## *OBSERVATION SUR LE PARTAGE des Terreins.*

236. Avant de procéder au partage d'un terrein, on doit ſe rendre attentif à ſa deſtination. Les circonſtances peuvent être telles, qu'à moins d'y conſtruire des maiſons ou d'y élever des édifices, l'utilité qui en peut revenir eſt d'une très petite conſidération.

Les héritiers qui auront à partager entre eux ces ſortes de terreins, auxquels ils ont un droit égal, doivent recevoir des portions égales de leur héritage, bien entendu que l'arpentage ſe fera du plan horiſontal ou de niveau, qui répond au Terrein propoſé, en cas qu'il s'y rencontre des pentes ou des inégalités qui méritent d'être conſidérées; par ce moyen, ceux des héritiers, à qui il écheoira un lot où ces inégalités ſeront fréquentes, auront en récompenſe plus de ſurface; autrement on leur feroit une très grande injuſtice, parce que l'étendue d'un édifice ne s'eſtime pas à raiſon de la pente du Terrein ſur lequel il eſt élevé, mais à raiſon du plan horiſontal qui répond au plan incliné, ainſi que nous

nous l'avons démontré très au long (n°. 208.). J'insiste sur ce point, parce que la plûpart des Livres qui traitent de l'Arpentage, n'ont point égard à cette observation, & que j'ai vû des Arpenteurs se conduire par d'autres principes, ou plûtôt se livrer à la routine d'évaluer la surface des terreins telle qu'elle se présente, sans avoir égard à l'objet de leur destination.

Si le partage que l'on veut faire, regarde des terres labourables, des prairies, des vergers, des bois; on examinera la nature du sol, c'est à dire, la qualité de la terre, parce que dans un même champ il y a des parties plus fécondes ou d'un meilleur rapport les unes que les autres, ce que l'on apprendra de l'expérience de ceux qui les ont cultivées.

On fera aussi attention aux ravins qui peuvent les couper, aux inondations qui peuvent en emporter l'engrais ou les détremper outre mesure, à la proximité des bois, d'où les bêtes fauves sont à portée de manger les plantes, ou de les endommager. Il faut même considérer les mauvais vents auxquels certaines parties sont exposées, tandis que d'autres jouissent d'un abri sûr, & bien d'autres choses auxquelles on doit avoir égard; afin que les inconvéniens soient compensés par les avantages, de manière que l'on gagne à peu près d'un côté ce que l'on perd de l'autre.

# LIVRE III.

## GÉOMÉTRIE DE L'ADOLESCENCE,

*Où l'on traite des Rapports & des Proportions.*

237. CETTE doctrine eſt plus profonde que la précédente ; elle eſt néceſſaire pour entrer dans tout ce que la Géométrie a de plus élevé. On ne ſçauroit plus faire un pas dans les Mathématiques ſans la rencontrer, ou ſans en avoir beſoin. C'eſt pourquoi j'appelle cette partie & tout ce qui en dépend, *Géométrie de l'adoleſcence :* elle ſuppoſe que l'on ait acquis quelques forces ; que de bonnes inſtitutions aient préparé, ou, pour ainſi dire, aient plié l'ame à réfléchir : cependant nous avons eu un ſi grand ſoin de lier cette doctrine à la précédente, que le paſſage de l'une à l'autre ne ſe fait preſque point ſentir ; on doit la regarder, moins comme une nouvelle connoiſſance, que comme une connoiſſance qui ne fait que s'étendre.

Tout ce que nous avons à dire ſur les Rapports & ſur les Proportions, ſera renfermé en deux Chapitres. On verra dans le premier les Rapports & les Proportions exprimés numériquement ou algébriquement ; & le ſecond traitera des Proportions des lignes, ou des lignes proportionnelles.

# CHAPITRE PREMIER.

## *Des Rapports & des Proportions numériques & algébriques.*

238. QUand nous avons parlé de la *règle de trois*, on a pû remarquer qu'elle consistoit à trouver un quatrième terme qui eût un *rapport* donné avec une quantité connue, quoiqu'alors nous ayons envisagé les grandeurs sous un autre point de vûe.

Un rapport est donc *le résultat de la comparaison que l'on fait entre deux quantités.* Ce que nous appellons un rapport, est quelquefois nommé une *raison :* or l'on peut comparer des quantités de deux manières différentes. En comparant 15 à 3, si l'on considère la différence de ces grandeurs c'est un *rapport Arithmétique ;* mais si l'on cherche à déterminer combien de fois l'une contient l'autre, ou combien de fois l'une est contenue dans l'autre, cette espece de comparaison est appellée *rapport Géométrique.*

239. Puisqu'un rapport Arithmétique consiste à trouver la différence qu'il y a entre deux grandeurs que l'on compare, il est évident que l'on découvre ce rapport par le moyen de la soustraction ; ainsi l'équation $15 - 3 = 12$, fait voir que le rapport Arithmétique de 15 à 3 est 12.

Mais on ne sçauroit déterminer que par la division combien de fois une grandeur est contenue dans une autre ; la division est donc le seul moyen de trouver un rapport Géometrique ; par conséquent $\frac{15}{3} = 5$ nous montre que le rapport Géométrique de 15 à 3 est 5.

240. L'expreſſion d'un rapport Arithmétique ou Géométrique peut donc ſe manifeſter, ou comme un rapport indiqué, ou comme un rapport trouvé; $15 - 3$ n'eſt pas moins le rapport Arithmétique de 15 à 3 que la quantité 12 : de même $\frac{15}{3}$ eſt une expreſſion du rapport Géométrique de 15 à 3, auſſi-bien que le nombre 5; ainſi on pourra prendre l'une pour l'autre, ſuivant le beſoin.

241. Dans la comparaiſon de deux grandeurs, on appelle *antécédent*, la grandeur que l'on compare; & celle à qui l'on compare, eſt appellée *conſéquent*: ſi vous comparez 15 à 3, le nombre 15 eſt l'antécédent, & 3 eſt le conſéquent.

Tout ce que nous allons dire des rapports, doit s'entendre des rapports Géométriques. Quand il ſera queſtion des rapports Arithmétiques, nous en avertirons.

On dit qu'un antécédent eſt *multiple* de ſon conſéquent, lorſque l'antécédent contient pluſieurs fois exactement ſon conſéquent, qui eſt alors *ſous-multiple* de l'antécédent. Par exemple, 20 eſt un multiple de 4, & 4 eſt ſous-multiple de 20. Si l'antécédent du rapport ou d'une raiſon eſt double, triple, quadruple, &c. de ſon conſéquent, on dit que le rapport, ou la raiſon de l'un à l'autre, eſt *double*, *triple*, &c. & qu'elle eſt *ſous-double*, *ſous-triple*, *ſous-quadruple*, quand l'antécédent n'eſt que la moitié, le tiers, le quart, &c. de ſon conſéquent.

242. *Une raiſon compoſée* eſt celle qui réſulte de la multiplication de deux ou de pluſieurs rapports; ainſi multipliant le rapport de 2 à 3 par celui de 5 à 7, ou multipliant $\frac{2}{3}$ par $\frac{5}{7}$ (240) le produit $\frac{10}{21}$ eſt une raiſon compoſée des deux raiſons $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$; d'où l'on voit que l'antécédent d'une raiſon compoſée eſt le produit des antécédens de toutes les raiſons qui la compoſent, & que ſon conſéquent eſt le produit de tous les conſéquents.

Mais en particulier, une raiſon compoſée eſt dite *doublée*, *triplée*, *quadruplée* d'une autre raiſon, quand cette raiſon eſt compoſée de deux, de trois, de quatre raiſons égales; ainſi le rapport $\frac{4}{9}$ eſt une raiſon doublée de la raiſon $\frac{2}{3}$ : cela s'exprime ordinairement, en diſant que $\frac{4}{9}$ *eſt en raiſon doublée de* $\frac{2}{3}$, parce que $\frac{4}{9}$ réſulte du rapport $\frac{2}{3}$ multiplié par lui-même. Pareillement $\frac{b^3}{c^3}$ eſt l'expreſſion du rapport triplé de $b$ à la quantité $c$, ou de $\frac{b^3}{c^3}$, puiſque $\frac{b}{c} \times \frac{b}{c} \times \frac{b}{c} = \frac{b^3}{c^3}$.

N'allez pas confondre une raiſon doublée ou triplée avec une raiſon double ou triple : car (n°. 241.) une raiſon eſt double ou triple, quand ſon antécédent contient deux ou trois fois ſon conſéquent; mais une raiſon doublée ou triplée eſt celle, qui réſulte d'un rapport multiplié une ou deux fois par lui-même. Le rapport de 6 à 3 eſt une raiſon double, c'eſt-à-dire, que 6 eſt à 3 en raiſon double, parce que 6 contient deux fois 3; mais ce rapport n'eſt pas doublé : car il n'eſt pas le produit d'un rapport par lui-même. Pareillement $\frac{25}{9}$ eſt une raiſon doublée de 5 à 3 ou de $\frac{5}{3}$ : car $\frac{5}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{9}$; & ce n'eſt pas une raiſon double, puiſque 25 ne contient pas ſeulement deux fois 9.

243. On juge qu'une raiſon eſt égale à une autre raiſon, lorſqu'en diviſant chaque antécédent par ſon conſéquent, on trouve un quotient égal de part & d'autre : ainſi le rapport de 12 à 4 eſt égal à celui de 15 à 5, parce que $\frac{12}{4} = 3$, auſſi bien que $\frac{15}{5}$. On doit dire la même choſe du rapport de $\frac{4}{6}$ à celui de $\frac{8}{12}$ : ces deux rapports ſont égaux, puiſque l'un & l'autre ſe réduit à $\frac{2}{3}$. Ainſi, pour bien juger de l'égalité de deux ou de pluſieurs rapports, il faut les exprimer ſous la forme d'une fraction, & réduire

enſuite ces fractions à leur plus ſimple expreſſion : par-là on voit tout à coup que les rapports de 3 à 9, de 6 à 18, de 2 à 6, &c. ſont des rapports égaux, parce qu'en leur donnant la forme de fractions $\frac{3}{9}$, $\frac{6}{18}$, $\frac{2}{6}$, & réduiſant ces fractions à leur plus ſimple expreſſion, on trouve $\frac{1}{3}$ pour chaque rapport.

On déterminera par le même moyen, lequel eſt le plus grand des deux rapports $\frac{6}{8}$ & $\frac{4}{12}$ : car en les réduiſant à leur plus ſimple expreſſion $\frac{3}{4}$ & $\frac{1}{3}$, il eſt viſible que le rapport de 6 à 8 exprimé par $\frac{3}{4}$, eſt plus grand que $\frac{1}{3}$, qui exprime le rapport de 4 à 12.

Quelquefois la plus ſimple expreſſion de deux ou de pluſieurs rapports ne montre pas tout d'un coup quel eſt le plus grand rapport : en ce cas, après les avoir transformés en fractions, on donnera à ces fractions une même dénomination : & la plus grande fraction, c'eſt-à-dire, le plus grand numérateur de ces fractions indiquera auſſi le plus grand rapport. Vous ne voyez pas d'abord que la raiſon de 5 à 7 ſoit plus petite que celle de 3 à 4. Mettez ces rapports ſous la forme de fractions, exprimez-les par $\frac{5}{7}$ & $\frac{3}{4}$ : donnez à ces fractions la même dénomination ; vous aurez $\frac{20}{28}$ & $\frac{21}{28}$, où $\frac{20}{28}$ eſt l'expreſſion de $\frac{5}{7}$, & $\frac{21}{28}$ eſt celle de $\frac{3}{4}$ : ainſi comme $\frac{21}{28}$ eſt plus grand que $\frac{20}{28}$, il eſt néceſſaire que $\frac{5}{7}$ ſoit plus petit que $\frac{3}{4}$, & par conſéquent que le rapport de 3 à 4 ſoit plus grand que celui de 5 à 7, c'eſt-à-dire, que 3 contient un plus grand nombre des parties de 4, que 5 n'en contient des parties de 7. Pour abréger cette expreſſion, on écrit $\frac{3}{4} \rhd \frac{5}{7}$. Le ſigne $\rhd$ veut dire *plus grand ;* & pour marquer *plus petit*, on tourne la pointe de l'autre ſens : ainſi $\frac{5}{7} \lhd \frac{3}{4}$ ſignifie que $\frac{5}{7}$ eſt plus petit que $\frac{3}{4}$, ou que la raiſon de 5 à 7 eſt plus petite que celle de 3 à 4.

Les nombres qui indiquent la plus ſimple ex-

preſſion des rapports, ſont appellés les *expoſans* de ces rapports : $\frac{6}{18}$ réduit à ſa plus ſimple expreſſion, donnant $\frac{1}{3}$, les nombres 1, 3, ſont les expoſans du rapport $\frac{6}{18}$.

## DES PROPORTIONS.

244. Une proportion eſt l'*égalité de deux rapports.* On l'appelle *Géométrique*, ſi elle eſt compoſée de rapports Géométriques, & *Arithmétique*, quand ce ſont des rapports Arithmétiques qui la forment. Il n'eſt queſtion pour le préſent que des proportions Géométriques.

Puiſqu'une proportion Géométrique eſt une égalité de rapports Géométriques, cette proportion peut s'exprimer par une équation : ainſi le rapport de 2 à 6 etant égal à celui de 3 à 9, on peut écrire $\frac{2}{6} = \frac{3}{9}$; mais on l'exprime plus ſouvent de cette manière, 2 . 6 : : 3 . 9 : ce qui veut dire, 2 eſt à 6 comme 3 eſt à 9; où l'on voit qu'un point entre deux termes ſignifie *eſt à*, & que les quatre points en quarré ſignifient *comme.*

Puiſqu'une proportion eſt compoſée de deux rapports qui ont chacun un antécédent, une proportion renferme deux antécédents & deux conſéquents. Dans l'exemple propoſé, 2 eſt le premier antécédent, & 3 eſt le ſecond; 6 eſt le premier conſéquent, & 9 eſt le ſecond conſéquent Les deux termes 2, 9, qui ſont aux extrémités de la proportion, s'appellent enſemble les *Extrémes* de la proportion, & les deux termes 6, 3, qui ſont dans le milieu, ſont appellés *Moyens.*

On dit qu'une proportion eſt *continue*, quand les moyens ſont les mêmes, ou ſont des quantités égales; ainſi 8 . 4 : : 4, 2 eſt une proportion continue : on exprime cette proportion par le ſigne

$\div\div$ que l'on met au-devant des termes de la proportion continue. On écrit donc $\div\div 8 . 4 . 2$ ; ce qui signifie la même chose que $8 . 4 :: 4 . 2$. La grandeur 4 qui se trouve dans le milieu, est appellée *Moyenne proportionnelle* entre 8 & 2. Une proportion continue peut avoir plus de trois termes : rien n'empêche qu'elle ne s'étende à l'infini ; dans ce cas elle prend le nom de *progression :* ainsi $8 . 4 :: 4 . 2 :: 2 . 1 :: 1 . \frac{1}{2}$, &c. est une progression Géométrique, qui s'exprime plus simplement par $\div\div 8 . 4 . 2 . 1 . \frac{1}{2}$, en mettant le signe $\div\div$ au commencement de tous les termes, que l'on écrit à la suite les uns des autres, en les séparant par un point.

*Théorème* (*a*) *fondamental & unique, dont on déduit toute la Théorie des proportions.*

245. Dans une proportion Géométrique, le produit des extrêmes est toujours égal au produit des moyens.

## DÉMONSTRATION.

Prenez la proportion numérique $3 . 9 :: 2 . 6$ ; il est évident que $3 \times 6 = 9 \times 2$ : car l'on a 18 de part & d'autre ; mais pourquoi cela ? Faites attention que 3 n'est que le tiers de 9 ; ainsi multipliant 3 par 6, vous ne devez avoir que le tiers de 9 qui seroit multiplié par 6 : or, au lieu de multiplier 9 par 6, vous ne le multipliez que par le tiers de 6, ou par 2 ; le produit de 9 par 2 n'est donc que le tiers du produit de 9 par 6 : ce produit est par conséquent égal à celui de 3 par 6, qui est aussi le tiers de $9 \times 6$ ; il est donc clair pourquoi dans ce

(*a*) *Théorème*, c'est une Proposition où il s'agit de démontrer une vérité découverte.

cas particulier le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens. Mais cela ne ſuffit pas ; il le faut démontrer généralement. Les quantités algébriques étant des grandeurs indéterminées, ce que l'on démontre par leur moyen eſt démontré dans tous les cas imaginables.

Soit donc $a.b::c.d$, l'expreſſion d'une proportion Géométrique quelconque. Il faut démontrer que le produit des extrêmes $ad = bc$, le produit des moyens.

Puiſqu'une proportion eſt l'égalité de deux rapports, on aura $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ : or deux grandeurs égales multipliées par une même grandeur donnent des produits égaux ; multiplions donc l'un & l'autre membre de cette équation par le produit $bd$ des dénominateurs : nous aurons $\frac{abd}{b} = \frac{bcd}{d}$ ou, en effaçant ce qui ſe détruit, $ad = bc$ ; C. Q. F. D.

Ce n'eſt pas ſans une bonne raiſon que je multiplie les deux membres de l'équation $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, par le produit $bd$ des conſéquents ou des dénominateurs ; c'eſt que l'on ne peut faire évanouir des fractions, qu'en multipliant par les quantités qui ſervent de diviſeurs ; & comme je ſçais par la concluſion du Théorème, qu'il faut que j'arrive à cette équation $ad = bc$, qui eſt totalement délivrée de fractions, on voit pourquoi, ayant transformé la proportion en cette égalité $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, j'en multiplie l'un & l'autre membre par le produit $bd$ des dénominateurs.

246. Réciproquement, ſi le produit de deux grandeurs quelconques eſt égal au produit de deux autres grandeurs, on pourra toujours former une proportion de ces quatre grandeurs.

## DÉMONSTRATION.

Prenons l'équation $3 \times 8 = 6 \times 4$. On voit que l'on en peut former la proportion $3 . 6 :: 4 . 8$; ce qui n'eſt qu'une démonſtration particulière : elle deviendra générale, en faiſant voir qu'ayant $b\,c = d\,s$, on en peut déduire $b . d :: s . c$, ou $\frac{b}{d} = \frac{s}{c}$.

Par la ſuppoſition, $b\,c = d\,s$; donc $\frac{b\,c}{c\,d} = \frac{d\,s}{c\,d}$ : car des grandeurs égales, diviſées par une même grandeur, donnent des quotients égaux ; ainſi ôtant ce qui ſe détruit de l'équation $\frac{b\,c}{c\,d} = \frac{d\,s}{d\,c}$, elle devient $\frac{b}{d} = \frac{s}{c}$, ou $b . d :: s . c$; C. Q. F. D.

On peut & on doit demander ce qui me détermine à diviſer par $c\,d$ les deux membres de l'équation $b\,c = d\,s$. C'eſt la concluſion du Théorême qui me guide : de ce que $b\,c = d\,s$, je dois trouver $\frac{b}{d} = \frac{s}{c}$ ; c'eſt-à-dire que $c$ doit s'évanouir du premier membre, & $d$ en devenir le diviſeur : or c'eſt ce qui arrive en diviſant par $d\,c$.

Ces remarques méritent que l'on y faſſe attention ; c'eſt en quoi conſiſte l'eſprit de l'Analyſe.

Le Théorême que nous venons de démontrer avec ſa converſe, eſt d'un avantage merveilleux pour la formation des équations : car dès que vous aurez une proportion, vous en pourrez faire une équation, & réciproquement une équation vous ſervira à conſtruire des proportions ; c'eſt pourquoi comme les termes d'une proportion peuvent ſe combiner entr'eux & avec d'autres grandeurs de bien des manières, vous diſcernerez toujours les cas où il y aura proportion, & ceux où la proportion n'aura plus lieu.

## COROLLAIRE I.

247. Si l'on connoît trois termes d'une proportion Géométrique, $a . b :: c . x$, le terme inconnu $x$ ſera toujours facile à connoître : on fera $ax = bc$; donc $x = \frac{bc}{a}$ : c'eſt-à-dire, que pour connoître la quatrième proportionnelle à trois grandeurs, il faut multiplier la ſeconde par la troiſième, & diviſer le produit par la première ; le quotient de cette diviſion ſera la quatrième proportionnelle.

Généralement, en quelqu'endroit de la proportion que l'inconnue ſe trouve, on la déterminera toujours, en diviſant le produit où elle ſe trouve par la grandeur qui multiplie cette inconnue : ſuppoſez que $c . y :: d . b$, vous aurez $dy = bc$; donc $y = \frac{bc}{d}$.

On a fait un grand uſage de cette propriété pour démontrer la Règle de trois. 5 hommes, dit on, font en un jour 50 toiſes d'un ouvrage ; combien 12 hommes en feront-ils à proportion ? Soit appellée $x$ la quantité cherchée : il eſt clair que les effets doivent être proportionnés à leur cauſe ; ainſi la queſtion propoſée ſe réduit à cette proportion, $5 . 50 :: 12 . x$; donc $\frac{10 \times 12}{5} = x = \frac{10 \times 5 \times 12}{5}$ $= 10 \times 12 = 120$. Par conſéquent 12 hommes feroient 120 toiſes par jour, en ſuppoſant que 5 en fiſſent 50.

En employant la converſe du Théorème fondamental, de quelque manière que la Règle de trois ſoit propoſée, elle ne cauſe aucun embarras. Par exemple, 50 hommes enfermés dans un Château doivent conſommer pendant 30 jours une certaine quantité de vivres ; en combien de jours 70 hommes feront-ils la même conſommation ? Il eſt cer-

tain que l'on ne peut pas disposer comme il faut les termes de cette question, en écrivant : 50 hommes . 30 jours : : 70 hommes . $x$ : cela signifieroit, puisque 50 hommes emploient 30 jours, 70 hommes employeront plus de 30 jours ; ce qui est très-faux. Car 70 hommes auront plutôt consommé une même quantité de vivres que 50 hommes.

Pour éviter l'embarras de la disposition des termes, faites une équation : appellez $p$ la quantité des vivres, & $x$ le nombre de jours cherché ; dites donc : 50 hommes en 30 jours, c'est 30 fois 50 Rations, qui égalent $p$ en consommation ; ainsi $30 \times 50 = p$, ou $1500 = p$.

De même 70 fois le nombre de jours cherché, est aussi égal à $p$, puisqu'il doit y avoir même consommation de part & d'autre ; on a donc cette autre équation $70 \times x = p$ : or deux grandeurs égales à une troisième, sont égales entr'elles ; donc $1500 = 70 \times x$. Ainsi $x = \frac{1500}{70}$, ou $\frac{150}{7} = 21 + \frac{3}{7}$ ; c'est-à-dire, que 70 hommes feront en 21 jours & $\frac{3}{7}$ de jour la même consommation, que feroient 50 hommes en 30 jours.

L'équation $30 \times 50 = 70 \times x$, fait voir la disposition suivant laquelle les termes doivent être rangés, si on veut les ordonner en proportion : car (n° 246.) 50 . 70 : : $x$ . 30. Ainsi comme 50 est plus petit que 70, le nombre $x$ des jours que l'on cherche, doit être aussi plus petit que 30. En effet, 70 hommes doivent employer moins de tems que 50 à faire une même consommation de vivres : c'est pourquoi les Arithméticiens appellent ordinairement cette proportion une *proportion inverse*, parce que dans la proportion directe le nombre des jours est proportionné à celui des hommes ; & dans l'inverse il y a d'autant moins de jours, qu'il

y a plus d'hommes. Quand on a reconnu par le bon ſens qu'une proportion eſt inverſe, ſi on veut en ordonner les termes, on mettra le troiſième terme à la quatrième place, & le terme inconnu $x$ à la troiſième.

Nous ne nous étendrons pas davantage ſur cette Règle, parceque nous l'avons démontrée d'une manière plus naturelle, lorſque nous avons expliqué la Règle de trois dans notre Traité d'Arithmétique.

## *COROLLAIRE II.*

248. Dans la proportion continue, le produit des extrêmes eſt égal au quarré de la moyenne. Soit la proportion continue $\dot{\dot{-}}$ 2 . 4 . 8; c'eſt un fait que $2 \times 8 = 4 \times 4$. Mais en général, ſi l'on a la proportion continue $a . b :: b . x$, on en déduira que $a x = b b$, puiſqu'une proportion Géométrique donne toujours le produit des extrêmes égal à celui des moyens.

## PROBLÊME.

249. Trouver une moyenne proportionnelle entre les deux grandeurs $a$, $b$.

## RÉSOLUTION.

Soit la moyenne proportionnelle inconnue appellée $y$. On aura cette proportion $a . y :: y . b$. Donc $a b = y y$. Ainſi $y = \sqrt{a b}$, c'eſt-à-dire, que la racine quarrée du produit des deux grandeurs données, eſt la moyenne proportionnelle cherchée; ce qui n'eſt pas toujours poſſible en nombres: on chercheroit inutilement une moyenne proportionnelle exacte entre 3 & 7; car $3 \times 7 = 21$, & la racine quarrée de 21 n'eſt pas déterminable à la rigueur: on peut ſeulement en approcher à l'infini.

## *COROLLAIRE III.*

250. Vous avez beau changer la place des termes d'une proportion $a.b::c.d$, la proportion ſubſiſtera (*), pourvû que les deux mêmes termes qui ſont extrêmes, ſoient toujours ou moyens ou extrêmes. Je dis donc, qu'ayant la proportion

$$a.b::c.d$$
ou $2.4::3.6$

on ne détruira point la proportion en faiſant les changemens ſuivans.

| | | |
|---|---|---|
| 1°. En renverſant | $b.a::d.c$ | |
| | $4.2::6.3$ | |
| 2°. En alternant | $a.c::b.d$ | |
| | $2.3::4.6$ | |
| 3°. . . | $d.c::b.a$ | |
| | $6.3::4.2$ | |
| 4°. . . | $d.b::c.a$ | |
| | $6.4::3.2$ | |
| 5°. . . | $c.a::d.b$ | |
| | $3.2::6.4$ | |
| 6°. . . | $c.d::a.b$ | |
| | $3.6::2.4$ | |
| 7°. . . | $b.d::a.c$ | |
| | $4.6::2.3$. | |

## DÉMONSTRATION.

Il eſt certain qu'il y aura une proportion dans tous ces cas, ſi le produit des extrêmes eſt toujours égal au produit des moyens (n°. 246.) : or pour peu que l'on ouvre les yeux ſur tous ces changemens, on apperçoit que ce ſont toujours les mêmes

(*) On ne veut pas dire ici que la même proportion ſubſiſtera ; mais qu'il y aura toujours une proportion géométrique quelconque.

grandeurs qui ſe multiplient; donc puiſque dans le premier cas le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens, à cauſe que l'on ſuppoſe une proportion, il arrivera la même choſe dans tous les autres cas; il y aura donc proportion. Ce qu'il falloit démontrer.

Si l'on a bien compris que le produit des extrêmes eſt toujours égal au produit des moyens, & que l'on peut toujours former une proportion dès que l'on a le produit de deux quantités égal au produit de deux autres quantités, il n'y a point de Commençant, qui ne puiſſe déterminer dans quelles circonſtances quatre grandeurs proportionnelles reſteront en proportion, ſoit que l'on ajoute, que l'on retranche, que l'on multiplie, que l'on diviſe, que l'on élève à des degrés, ou que l'on extraie les racines des grandeurs qui ſont en proportion; puiſqu'en prouvant l'égalité du produit des extrêmes avec celui des moyens, on aura un caractère infaillible de l'exiſtence de la proportion, comme on va le voir.

## *COROLLAIRE IV.*

251. Dans une proportion Géométrique $a . b :: c . d$; ajoutez aux antécédents, ou retranchez en ce que vous voudrez, pourvû que les grandeurs ajoutées ou retranchées ſoient en même rapport que les antécédents, il y aura toujours proportion; dites la même choſe des conſéquents. Mais plus ſimplement: ſi ce que l'on ajoute ou que l'on retranche, n'empêche pas que le produit des extrêmes ne ſoit égal à celui des moyens, la proportion ſubſiſtera; ainſi vous pouvez faire les additions ou les ſouſtractions ſuivantes, ſans détruire la proportion.

Soit la proportion $\begin{matrix} a . b :: c . d \\ 12 . 3 :: 8 . 2 \end{matrix}$

Donc en *compoſant*, ou plutôt en ajoutant,

$$\begin{array}{rrrrrrr} a & + & b & . & b & :: & c + d . d \\ 15 & & & . & 3 & :: & 10 \quad . 2 \\ a & + & b & . & a & :: & c + d . c \\ 15 & & & . & 12 & :: & 10 \quad . 8 \\ a & + & c & . & c & :: & b + d . d \\ 20 & & & . & 8 & :: & 5 \quad . 2 \\ a & + & c & . & a & :: & b + d . b \\ 20 & & & . & 12 & :: & 5 \quad . 3. \end{array}$$

Car prenez laquelle vous voudrez de ces différentes diſpoſitions, par exemple, $a + c . a :: b + d . b$ : faites le produit des extrêmes, qui eſt $a\,b + b\,c$, & celui des moyens $a\,b + a\,d$; il y a égalité entre ces deux produits, c'eſt-à-dire, que $a\,b + b\,c = a\,b + a\,d$: il eſt évident, 1°. que $a\,b = a\,b$; 2°. que $b\,c = a\,d$, puiſque la proportion donnée $a . b :: c . d$ produit $b\,c = a\,d$. Donc $a\,b + b\,c = a\,b + a\,d$. Ainſi le produit des extrêmes étant égal à celui des moyens, c'eſt une néceſſité qu'il y ait proportion.

De même, ſuppoſez que $a . b :: c . d$, vous aurez en *ſouſtrayant*,

$$\begin{array}{l} a - b . b :: c - d . d \\ a - b . a :: c - d . c \\ b - a . a :: d - c . c \\ b - a . b :: d - c . d \\ a - c . c :: b - d . d \\ a - c . a :: b - d . b \\ c - a . a :: d - b . b \\ c - a . c :: d - b . d. \end{array}$$

Vous n'avez qu'à prendre une de ces diſpoſitions, telle que $a - b . b :: c - d . d$; vous trouverez toujours que le produit des extrêmes $a\,d - b\,d = b\,c - b\,d$ le produit des moyens : car premièrement $- b\,d = - b\,d$. En ſecond lieu, $a\,d = b\,c$, puiſque

puiſque l'hypothèſe eſt $a . b :: c . d$; ainſi $ad = bc$. Donc $ad - bd = bc - bd$.

Il n'y a rien au monde de ſi aiſé que ces démonſtrations, quand on en tient le principe; c'eſt pourquoi on ne doit pas s'effrayer de cette multitude de changemens, dont les termes d'une proportion ſont ſuſceptibles: il n'eſt pas même néceſſaire que l'on ſe rompe la tête à les retenir toutes; il ſuffit que l'on acquière l'habitude de les trouver au beſoin: d'ailleurs, en ſubſtituant des nombres à la place des lettres, on voit tout d'un coup s'il y a proportion ou non.

## *COROLLAIRE V.*

252. Si l'on multiplie ou ſi l'on diviſe les antécédents d'une proportion par une même grandeur $m$, la proportion ſubſiſtera: on ne la détruira pas non plus en multipliant ou en diviſant ſes conſéquents par une même grandeur $s$.

Soit donc $a . b :: c . d$. Je dis que

1°. $am . b :: cm . d$

2°. $\frac{a}{m} . b :: \frac{c}{m} . d$

3°. $a . bs :: c . ds$

4°. $a . \frac{b}{s} :: c . \frac{d}{s}$.

## DÉMONSTRATION.

On n'a qu'à faire le produit des extrêmes, & voir s'il eſt égal à celui des moyens.

Par la ſuppoſition $a . b :: c . d$. Donc $ad = bc$; donc $adm = bcm$: c'eſt ce que l'on tire du premier cas. Donc $\frac{ad}{m} = \frac{bc}{m}$: c'eſt le produit du ſecond cas. Donc $ads = bcs$: réſultat du troiſième

cas. Donc $\frac{ad}{s} = \frac{bc}{s}$ : c'eſt ce que l'on déduit du quatrième cas ; par conſéquent le cinquième Corollaire eſt démontré en toutes ſes parties.

## *COROLLAIRE VI.*

253. Soient les deux Proportions,

$$a . b :: c . d$$
$$f . g :: m . s.$$

Je dis qu'en multipliant ou en diviſant par ordre chaque antécédent par chaque antécédent, & chaque conſéquent par chaque conſéquent correſpondant, il y aura encore proportion, c'eſt à-dire, que $af . bg :: cm . ds$, ou que $\frac{a}{f} . \frac{b}{g} :: \frac{c}{m} . \frac{d}{s}$.

## DÉMONSTRATION.

Cela ſera vrai, ſi l'on démontre dans les deux cas, que le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens. Il faut donc prouver, 1°. que $adfs = bcgm$ ; 2°. que $\frac{ad}{fs} = \frac{bc}{gm}$.

Par la ſuppoſition $a . b :: c . d$. Donc $ad = bc$.

On a auſſi (ſupp.) $f . g :: m . s$. Donc $fs = gm$.

Par conſéquent $ad \times fs = bc \times gm$, ou $\frac{ad}{fs} = \frac{bc}{gm}$ ; parce que des grandeurs égales, multipliées ou diviſées par des grandeurs égales, reſtent toujours égales ; C. Q. F. D.

Quand il y auroit plus de deux proportions, le Corollaire ſeroit toujours vrai.

254. On voit par-là que les quarrés, les cubes, les quatrièmes puiſſances, &c. des termes proportionnels ſont auſſi en proportion, c'eſt-à-dire, qu'ayant $a . b :: c . d$, on aura $a^2 . b^2 :: c^2 . d^2$, ou $a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$ ; puiſque la proportion $a^2 , b^2$

$:: c^2 . d^2$, peut venir des deux proportions égales $\begin{matrix} a . b :: c . d \\ a . b :: e . d \end{matrix}$ multipliées par ordre, & cette multiplication donneroit $a^2 . b^2 :: c^2 . d^2$; mais on peut démontrer indépendamment du Corollaire précédent, que $a^2 . b^2 :: c^2 . d^2$, ou que $a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$, en supposant la proportion $a . b :: c . d$: car on en tire $a d = b c$. Donc $a^2 d^2 = b^2 c^2$, en quarrant l'un & l'autre membre; par conséquent $a^2 . b^2 :: c^2 . d^2$.

De même en élevant au cube les deux membres de l'équation $a d = b c$, on aura $a^3 d^3 = b^3 c^3$, ou $a^3 \times d^3 = b^3 \times c^3$; donc $a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$; C. Q. F. D.

Il est évident, par la même raison, que des grandeurs en proportion ont aussi leurs racines de même degré en proportion, c'est-à-dire, que si $a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$, on en pourra déduire la proportion $a . b :: c . d$. Car (supp.) $a^3 d^3 = b^3 c^3$; donc, extrayant la racine cubique de l'un & de l'autre membre, on trouve $a d = b c$, ou $a . b :: c . d$.

Nous ferons usage de ces vérités, lorsque nous traiterons des lignes proportionnelles; ainsi, quoique leur démonstration soit extrêmement facile, on doit les considérer autant qu'il est nécessaire, pour se les graver dans la mémoire.

## *COROLLAIRE VII.*

255. Deux proportions $a . b :: c . d$, & $f . g :: m . s$, dont les rapports de l'une sont égaux aux rapports de l'autre, donneront encore une proportion, si l'on ajoûte par ordre les antécédents aux antécédents, & les conséquents aux conséquents, ou si l'on retranche ces mêmes grandeurs par ordre. Soient

$f . g :: m . s ::$
$12 . 4 :: 18 . 6;$

donc les deux proportions $a . b :: c . d ::$
$9 . 3 :: 6 . 2.$

Je dis que l'on peut en déduire, en ajoutant par ordre :

1°. La proportion $a+f . b+g :: c+m . d+s.$
$21 . 7 :: 24 . 8.$

2°. En ſouſtrayant auſſi par ordre, on en tirera cette autre proportion $f-a . g-b :: m-c . s-d$
$3 . 1 :: 12 . 4.$

## DÉMONSTRATION.

Cela eſt évident par les proportions exprimées numériquement ; mais on le démontrera généralement, en faiſant voir que le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens. Prenons d'abord la proportion $a+f . b+g :: c+m . d+s$ ſuppoſée, & montrons qu'elle eſt réelle. On fera le produit des extrêmes & celui des moyens. Il y aura d'une part $ad+as+fd+fs$, & de l'autre $bc+bm+cg+gm$ ; il faut donc prouver que $ad+as+fd+fs=bc+bm+cg+gm$ ; mais on a, par la ſuppoſition, $f . g :: m . s :: a . b :: c . d$ ;

Donc
$$ad=bc$$
$$as=bm$$
$$fd=cg$$
$$fs=gm.$$

Donc $ad+as+fd+fs=bc+bm+cg+gm.$

Le produit des extrêmes eſt donc égal à celui des moyens ; & par conſéquent il y a proportion.

La ſeconde partie ſe prouvera comme la première ; mais remarquez bien, qu'afin que l'on

puiſſe ajouter ou ſouſtraire par ordre les termes de deux proportions ſans détruire la proportion, il eſt néceſſaire que les rapports dont l'une eſt compoſée, ſoient égaux aux rapports de l'autre. Car, en prenant les deux proportions $\begin{matrix}2.4::3.6\\5.15::4.12\end{matrix}$ qui ne ſont pas compoſées de rapports égaux, ſi l'on ajoutoit par ordre leurs antécédents & leurs conſéquents, il n'en réſulteroit pas une nouvelle proportion; puiſque les quatre termes $2+5$, $4+15$, $3+4$, $6+12$, ne ſont pas proportionnels, c'eſt-à dire, que 7 n'eſt pas à 19, comme 7 eſt à 18.

## *COROLLAIRE VIII.*

256. Dans une proportion continue $\dddot{=} a.b.c$, le quarré du premier terme eſt au quarré du ſecond, comme le premier eſt au troiſième, c'eſt-à-dire, $a^2.b^2::a.c$.

## DÉMONSTRATION.

Par la ſuppoſition $a.b::b.c$. Donc $ac=b^2$; ainſi multipliant l'un & l'autre membre de cette équation par la même grandeur $a$, on aura $a^2c=ab^2$, ou $a^2\times c=b^2\times a$; d'où l'on tire $a^2.b^2::a.c$; C. Q. F. D.

## *COROLLAIRE IX.*

257. Si la proportion continue a quatre termes, & que l'on ait $\dddot{=} a.b.c.d$, je dis que le cube de la première eſt au cube de la ſeconde, comme la première eſt à la quatrième, c'eſt-à-dire que $a^3.b^3::a.d$.

## DÉMONSTRATION.

1°. De ce que $a . b :: b . c$, on déduit (n°. 256.) $a^2 . b^2 :: a . c$, ou $a^2 c = a b^2$. 2°. Puiſque $a . b :: b . c :: c . d$; donc $a . b :: c . d$: ainſi $a d = b c$. Multipliant les membres de la première équation par ceux de la ſeconde, le premier membre par le premier membre, & le ſecond par le ſecond, il en réſultera l'équation $a^3 c d = a b^3 c$, dont l'un & l'autre membre diviſé par $c$, produit $a^3 d = a b^3$, ou $a^3 \times d = b^3 \times a$; donc $a^3 . b^3 :: a . d$ (n°. 246.); C. Q. F. D.

Généralement, quel que ſoit le nombre des quantités qui ſont en proportion continue, en donnant pour Expoſans aux deux premiers termes de la proportion ce même nombre diminué de l'unité, les deux premiers termes ainſi affectés ſeront enr'eux comme le premier eſt au dernier. S'il y a, par exemple, neuf quantités en proportion continue, dont la première ſoit $a$, la ſeconde $b$, & la dernière $r$, on aura $a^8 . b^8 :: a . r$. S'il y en avoit 17, on diroit $a^{16} . b^{16} :: a . r$, &c. On fera uſage de cette obſervation.

## *COROLLAIRE X.*

258. Lorſque l'on a une ſuite de raiſons égales, telle que $a . b :: c . d :: f . g :: m . n$, &c. la ſomme des antécédents eſt à la ſomme des conſéquents, comme un antécédent quelconque eſt à ſon conſéquent. Il s'agit donc de prouver que $a + c + f + m . b + d + g + n :: a . b$.

## DÉMONSTRATION.

En faiſant voir que le produit des extrêmes eſt

égal à celui des moyens, on aura démontré qu'il y a proportion. Le produit des extrêmes eſt $ab+bc+bf+bm$; & celui des moyens eſt $ab+ad+ag+an$. Il s'agit donc de prouver que $ab+bc+bf+bm=ab+ad+ag+an$.

1°. $ab=ab$.

2°. $bc=ad$; puiſque (ſupp.) $a.b::c.d$.

3°. $bf=ag$: car (ſupp.) $a.b::f.g$.

4°. $bm=an$; parce que (ſupp.) $a.b::m.n$. Donc $ab+bc+bf+bm=ab+ad+ag+an$; C. Q. F. D.

Exprimez en nombres une ſuite de raiſons égales; prenez la ſuite $2.6::3.9::1.3::4.12$, &c. & vous verrez ſur le champ que la ſomme des antécédents $2+3+1+4$, ou 10, eſt à la ſomme des conſéquents $6+9+3+12$, ou 30, comme 2 eſt à 6, c'eſt-à-dire, que $10.30::2.6$; ce qui ſaute aux yeux.

Nous ne pouſſerons pas plus loin nos recherches ſur les différens changemens que peuvent recevoir les termes d'une proportion, ſans ceſſer d'être proportionnels; un plus grand détail appartient à un Traité complet de calcul: nous n'avons dû conſidérer ici les proportions que relativement à la Géométrie qui va ſuivre. Cependant on fait en certaines rencontres un ſi grand uſage des progreſſions Arithmétiques comparées aux progreſſions Géométriques, que nous ne devons pas laiſſer ignorer aux Commençans l'avantage que l'on retire de cette comparaiſon.

### *De la Proportion Arithmétique.*

259. On appelle proportion Arithmétique l'égalité de deux rapports Arithmétiques. Cette pro-

portion ſe marque à-peu-près comme une proportion Géométrique ; toute la différence eſt que l'on ne met que deux points entre les deux rapports de la proportion Arithmétique : ainſi $5 . 2 : 10 . 7$, eſt l'expreſſion d'une proportion Arithmétique ; cela ſignifie que 5 ſurpaſſe 2, comme 10 ſurpaſſe 7. Or on trouve l'excès d'une grandeur ſur une autre, en ôtant la plus petite de la plus grande ; on pourra par conſéquent exprimer les deux rapports d'une proportion Arithmétique par une ſouſtraction indiquée. La proportion Arithmétique $5 . 2 : 10 . 7$, pourra donc recevoir la forme d'une équation, & par conſéquent devenir $5 - 2 = 10 - 7$, ou généralement, ſi $a . b$ arithmétiquement comme $c . d$, on écrira $a . b : c . d$, ou $a - b = c - d$.

## THÉORÈME II.

260. Dans une proportion Arithmétique

$$a . b : c . d$$
$$12 . 9 : 18 . 15$$

la ſomme des extrêmes $a + d$, eſt toujours égale à la ſomme des moyens $b + c$.

## DÉMONSTRATION.

Prenez la proportion Arithmétique $12 . 9 : 18 . 15$. Il eſt évident que $12 + 15$ ſomme des extrêmes, eſt égale à $9 + 18$, qui eſt la ſomme des moyens.

Mais en général il faut prouver que, ſi l'on a la proportion Arithmétique $a . b : c . d$, il en réſultera $a + d = b + c$. Or c'eſt ce qui arrive : car (ſupp.) $a - b = c - d$ ; donc, en tranſpoſant $b$ & $d$ avec des ſignes contraires, on trouve $a + d = b$

$+ c$, c'eſt-à-dire, que la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des moyens.

Réciproquement, ſi $a + d = b + c$, je dis que $a . b$ arithmétiquement : $c . d$ : car, puiſque $a + d = b + c$, on aura, en tranſpoſant, $a - b = c - d$, ou $a . b : c . d$.

## PROBLÊME.

261. Trois termes, 5, 9, 14, d'une proportion Arithmétique étant donnés, trouver le quatrième que j'appelle $x$.

## RÉSOLUTION.

Dites : $5 . 9 : 14 . x$; donc $5 + x = 14 + 9 = 23$ (n°. 260.) : ainſi $x = 23 - 5 = 18$. Effectivement 5 eſt ſurpaſſé par 9, comme 14 l'eſt par 18. Et généralement, ayant la proportion $a . b : c . x$, on aura $a + x = b + c$. Donc $x = b + c - a$; c'eſt-à-dire, que l'on trouve un quatrième proportionnel Arithmétique, en ſouſtrayant le premier terme de la ſomme des moyens.

## *COROLLAIRE.*

262. Dans une proportion continue Arithmétique $a . b : b . c$, la ſomme des extrêmes eſt

7 . 12 : 12 . 17

égale au double de la moyenne.

## DÉMONSTRATION.

Il faut prouver que $a + c = 2b$. Or, puiſque la proportion eſt Arithmétique, la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des moyens (n°. 260.); donc $a + c = b + b$ ou $2b$; C. Q. F. D.

Mais cela eſt encore plus ſenſible dans la proportion continue Arithmétique 7 . 12 : 12 . 17 : car $7 + 17 = 12 + 12$, ou $= 24$ double de 12, moyen proportionnel.

## PROBLÊME.

263. Trouver un moyen proportionnel Arithmétique entre 13 & 8.

## RÉSOLUTION.

Faites $13 . x : x . 8$. Donc $2x = 21$; par conſéquent $x = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$, le moyen proportionnel cherché. En effet $13 . 10\frac{1}{2} : 10\frac{1}{2} . 8$; car la ſomme des extrêmes $13 + 8$, ou $21 = 10\frac{1}{2} + 10\frac{1}{2}$, c'eſt-à dire, 21.

Et généralement, pour trouver un moyen proportionnel Arithmétique $x$ entre $a$ & $b$, on fera $a . x : x . b$. Donc $a + b = 2x$ : ainſi $x = \frac{a+b}{2}$. C'eſt-à-dire, que la moyenne proportionnelle Arithmétique entre deux grandeurs eſt égale à la moitié de la ſomme des extrêmes.

## *DES LOGARITHMES.*

264. Comme une progreſſion Géométrique eſt une ſuite de rapports Géométriques égaux, une progreſſion Arithmétique eſt auſſi une ſuite de rapports Arithmétiques égaux que l'on exprime ainſi $\div$ 2 . 4 . 6 . 8 . 10, &c. ce qui ſignifie que 2 eſt à 4 arithmétiquement, comme 4 eſt à 6, comme 6 eſt à 8, &c. En formant une progreſſion Géométrique, on s'eſt apperçu qu'il en naiſſoit une progreſſion Arithmétique. Avec les deux termes 1, $b$, faites une progreſſion Géométrique, vous

aurez $1 . b :: b . \frac{bb}{1}$; ainſi $b^2$ ſera le troiſième terme de votre progreſſion : continuez en diſant $b . b^2 :: b^2 . \frac{b^4}{b} = b^3$; par conſéquent $b^3$ ſera le quatrième terme de la progreſſion. Vous trouverez de même que $b^4$ en ſeroit le cinquième, $b^5$ le ſixième, & ainſi de ſuite à l'infini; par conſéquent la progreſſion Géométrique, dont les deux premiers termes ſont $1, b$, ſera $\div\div 1 . b^1 . b^2 . b^3 . b^4 . b^5 . b^6$, &c. en augmentant toujours d'un degré : où il eſt aiſé de remarquer que, tandis que les termes de cette ſuite ſont en progreſſion Géométrique, les Expoſans de ces termes forment la progreſſion Arithmétique $\div 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6$ : or l'on a appellé *Logarithmes*, les termes d'une progreſſion Arithmétique, qui répondent à ceux d'une progreſſion Géométrique. Comme dans la progreſſion $\div\div 1 . b^1 . b^2 . b^3$, &c. l'unité n'a point de terme Arithmétique correſpondant, on lui ſuppoſera 0, afin que chaque terme de la progreſſion Géométrique réponde à ſon Logarithme; on écrira donc les deux progreſſions l'une ſous l'autre de cette manière :

$$\begin{array}{l} \div\div 1 . b^1 . b^2 . b^3 . b^4 . b^5 . b^6 . \text{ \&c.} \\ \div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . \end{array}$$ Voici

les obſervations que l'on a faites ſur ces deux progreſſions ainſi comparées.

1°. Le Logarithme d'un produit eſt toujours égal à la ſomme des Logarithmes des quantités qui ont concouru à former ce produit. Prenez $b^1$, qui eſt le produit de $b^2$ par $b^3$, les Logarithmes de $b^2$ & $b^3$ ſont 2 & 3, dont la ſomme eſt 5, qui vaut réellement le Logarithme 5 du prodnit $b^5$.

2°. Le Logarithme du quotient de deux grandeurs diviſées l'une par l'autre, eſt égal à la diffé-

rence des Logarithmes de ces grandeurs. Diviſez $b^5$ par $b^4$ : vous aurez le quotient $b^2$, dont le Logarithme eſt 2 ; & ce Logarithme 2 eſt égal à la différence $6 - 4$ des Logarithmes des grandeurs $b^6$, $b^4$.

3°. Le Logarithme d'une grandeur n'eſt que la moitié du Logarithme de ſon quarré ; c'eſt une ſuite de ce que nous avons dit : mais prenez la grandeur $b^3$, quarrez-la ; elle ſera $b^6$ : or 3 Logarithme de $b^3$, n'eſt que la moitié de 6 Logarithme de $b^6$.

4°. Le Logarithme d'un nombre n'eſt que le tiers du Logarithme de ſon cube. Car $b^6$ eſt le cube de $b^2$, le Logarithme de $b^6$ eſt 6, & celui de $b^2$ eſt 2, qui n'eſt que le tiers du Logarithme 6.

265. On voit bien que cela eſt, me dira-t-on ; le fait eſt amplement prouvé : l'important eſt de ſçavoir comme cela arrive.

Pour le démontrer, prenons deux progreſſions numériques $\begin{matrix}\cdot\\ \vdots\\ \cdot\end{matrix}$ 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64 . 128.
$\begin{matrix}\cdot\\ \vdots\\ \cdot\end{matrix}$ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7.

où l'on voit que le Logarithme de 1 eſt 0, celui de 2 eſt 1, celui de 4 eſt 2, celui de 32 eſt 5, &c. Dans la Démonſtration ſuivante, un nombre précédé de la lettre $l$, ſera l'expreſſion du Logarithme de ce nombre. Ainſi $l\,3$ ſignifiera le Logarithme de 3 ; $\overline{l\,8 \times 4}$, ou $l\,32$, ſignifiera le Logarithme de 32, &c.

Cela ſuppoſé, il s'agit de démontrer que le Logarithme d'un produit tel que $4 \times 8$, eſt égal à la ſomme des Logarithmes des racines 4, 8 ; c'eſt-à dire, que $\overline{l\,4 \times 8} = l\,4 + l\,8$.

## DÉMONSTRATION.

Puiſque $4 \times 8 = 32 \times 1$, on aura la pro-

portion Géométrique 1 . 4 : : 8 . 32, dont les Logarithmes doivent former une proportion Arithmétique; ainſi $l1 . l4 : l8 . l32$. Mais (260.) dans une proportion Arithmétique la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des moyens; donc $l1 + l32 = l4 + l8$. Or (ſupp.) $l1 = 0$; donc $l32 = l4 + l8 = \overline{l4 \times 8}$; c'eſt-à-dire, que le Logarithme du produit de 4 par 8 eſt égal à la ſomme des Logarithmes des racines 4, 8 de ce produit. Ce qu'il falloit démontrer.

On prouvera de même que le Logarithme du quotient 16 des deux nombres 64 & 4, eſt égal à la différence qu'il y a entre les Logarithmes de ces nombres; c'eſt-à-dire, que $l16 = l64 - l4$. Car, par la ſuppoſition, $\frac{64}{4} = 16$. Donc (en multiplant par 4) $64 \times 1 = 16 \times 4$; ainſi 1 . 4 : : 16 . 64; & par conſéquent $l1 . l4 : l16 . l64$; donc (n°. 260.) $l1 + l64 = l4 + l16$. Or (ſupp.) $l1 = 0$; par conſéquent $l64 = l4 + l16$. Donc enfin $l64 - l4 = l16$.

Il ne ſera pas plus difficile de prouver que le Logarithme d'un nombre n'eſt que la moitié du Logarithme de ſon quarré. Prenez 8, quarrez-le, vous aurez 64; il faut donc prouver que $l8 = \frac{l64}{2}$.

## DÉMONSTRATION.

Par la ſuppoſition, $8 \times 8 = 64 \times 1$. Donc 1 . 8 : : 8 . 64. Ainſi $l1 . l8 : l8 . l64$. Donc (n°. 260.) $l1 + l64 = l8 + l8 = 2l8$. Or $l1 = 0$. Donc $l64 = 2l8$. Et par conſéquent, en diviſant l'un & l'autre membre par 2, on aura $\frac{l64}{2} = l8$; C. Q. F. D.

On déduira facilement de cette dernière Démonſ-

mière $x$ des deux moyennes proportionnelles eſt égale à une grandeur connue, puiſqu'il ne s'agit plus que d'extraire la Racine cubique de la quantité $aab$, que l'on ſuppoſe donnée par la nature de la queſtion; faiſant donc $\sqrt[3]{aab} = c$ : afin de calculer avec plus de facilité, je ſubſtitue $c$ à la place de $x$ dans la progreſſion $a.x::x.y::y.b$, & elle ſe change en cette autre $a.c::c.y::y.b$, où il ne s'agit plus que de trouver une moyenne proportionnelle entre $c$ & $b$; ce qui ne ſouffre aucune difficulté après la découverte de la première, puiſque $a.c::c.\frac{cc}{a}::\frac{cc}{a}.b$, où l'on voit que $\frac{cc}{a}$ eſt la ſeconde moyenne proportionnelle; parce que quand on a trois termes d'une proportion, on doit multiplier le ſecond par le troiſième, en diviſer le produit par le premier, & le quotient de cette diviſion eſt le quatrième proportionnel (n°. 247.).

On pourroit trouver la première $x$ des moyennes proportionnelles $x, y$, ſans faire deux équations : il n'y a qu'à ſe rappeller, que dans une proportion continue de quatre termes, le cube de la première eſt au cube de la ſeconde, comme la première eſt à la quatrième (257.); on aura donc $a^3.x^3::a.b$, d'où l'on déduit $a^3 b = a x^3$, & diviſant par $a$, l'équation devient $a^2 b = x^3$; par conſéquent $x = \sqrt[3]{a^2 b}$, comme ci-deſſus.

Comme on fait uſage de ce Problême en Géométrie, il n'eſt pas hors de propos de le réſoudre numériquement. On demande deux moyennes proportionnelles entre 3 & 24. Prenez la formule

mule $x = \sqrt[3]{a^2 b}$, qui est l'expression de la première moyenne proportionnelle entre $a$ & $b$. Cette expression nous avertit qu'il faut extraire la Racine cubique du quarré $a^2$ du premier terme $a$ multiplié par le quatrième $b$. Par conséquent élevons 3 à son quarré 9; multiplions ce quarré par 24 : le produit sera 216, dont la Racine cubique 6 est la première des deux moyennes proportionnelles entre 3 & 24; après cela la seconde est aisée à trouver : car 3 . 6 :: 6 . 12 :: 12 . 24; ainsi 6 & 12 sont les deux moyennes proportionnelles cherchées.

Si vous ne voulez pas vous servir de la formule $x = \sqrt[3]{a^2 b}$, dites (n°. 257.) : le cube de 3 est au cube de $x$ comme le premier terme 3 est au quatrième 24. Donc $27 . x^3 :: 3 . 24$, ou $3 . 24 :: 27 : x^3$; ainsi $x^3 = \frac{24 \times 27}{3} = 8 \times 27 = 216$

Donc $x = \sqrt[3]{216} = 6$, ainsi que nous l'avons trouvé par la formule.

268. Il y a quelques Règles de Changes étrangers assez difficiles, mais dont la Résolution devient fort aisée avec le secours des Proportions.

## PROBLÊME.

Si 100 liv. de Venise pèsent 70 liv. de Lyon,
120 liv. de Lyon . . . . . 100 liv. de Rouen,
80 liv. de Rouen . . . . 100 liv. de Toulouse,
100 liv. de Toulouse . . . 74 liv. de Genève;
Combien 100 liv. de Venise font-elles de liv. pesant de Genève?

## RÉSOLUTION.

Soit la livre pesant de Venise = V
Celle de Lyon . . . . . L
Celle de Rouen . . . . . R
Celle de Toulouse . . . . . T
Et celle de Genève . . . . . G

Par les conditions du Problême vous aurez les équations suivantes : 100 V = 70 L. 120 L = 100 R. 80 R = 100 T. 100 T = 74 G ; d'où vous déduirez ces quatre Proportions :

V . L :: 70 . 100.
L . R :: 100 . 120.
R . T :: 100 . 80.
T . G :: 74 . 100.

Donc en multipliant par ordre tous les antécédents par les antécédents, & les conséquents par les conséquents (n°. 253.), vous aurez cette unique proportion, V × L × R × T . L × R × T × G :: 70 × 100 × 100 × 74 . 100 × 120 × 80 × 100 ; d'où l'on tire l'équation suivante :

$$\frac{V \times L \times R \times T}{L \times R \times T \times G} = \frac{70 \times 100 \times 100 \times 74}{100 \times 120 \times 80 \times 100}$$

qui se réduisent à $\frac{V}{G} = \frac{70 \times 74}{120 \times 80}$, en effaçant ce qui se détruit ; ou encore $\frac{V}{G} = \frac{7 \times 74}{12 \times 80} = \frac{7 \times 37}{6 \times 80} = \frac{259}{480}$. Ainsi V . G :: 259 . 480 ; ce qui signifie que la livre pesant de Venise est à la livre pesant de Genève, comme 259 est à 480 ; ou que la livre pesant de Venise n'est que les $\frac{259}{480}$ parties de la livre pesant de Genève. Faites maintenant ce raisonnement : si une livre de Venise est réduite à $\frac{259}{480}$ de la livre de Genève, à combien

100 livres de Veniſe ſeront-elles réduites? Vous aurez donc cette proportion, $1 . \frac{259}{480} :: 100 . x$, ou $480 . 259 :: 100 . x$ (en multipliant les deux premiers termes par 480 pour faire évanouir la fraction) (n°. 252.); ainſi $\frac{259 \times 100}{480} = x = \frac{259 \times 10}{48} = \frac{259 \times 5}{24} = 53$ liv. $+ \frac{23}{24}$, c'eſt-à-dire, que 100 liv. de Veniſe ne valent pas tout à-fait 54 liv. de Genève; il s'en faut $\frac{1}{24}$.

J'ai détaillé la Réſolution de ce Problème, afin que l'on ait un modèle bien raiſonné, applicable à toutes les queſtions ſemblables.

## PROBLÊME

*Semblable au précédent.*

| | | |
|---|---|---|
| 1 écu de France vaut | 80. | den. de Hol. |
| 415. den. de Hollande | 240. | den. d'Anglet. |
| 240. den. d'Angleterre | 420. | den. de Hamb. |
| 64. den. de Hambourg | 1. | florin de Francf. |

Combien 166 écus de France valent-ils de florins de Francfort?

## RÉSOLUTION.

| | |
|---|---|
| Appellons la monnoie de France | F |
| Celle de Hollande | H |
| Celle d'Angleterre | A |
| Celle de Hambourg | h |
| Celle de Francfort | f |

On aura par les conditions du Problême :

F, H :: 80 . 1
H . A :: 240 . 415
A . h :: 420 . 240
h . f :: 1 . 64.

Donc en multipliant par ordre ; on aura l'équation $\frac{F \times H \times A \times h}{H \times A \times h \times f} = \frac{80 \times 240 \times 420}{415 \times 240 \times 64}$,

ou $\frac{F}{f} = \frac{80 \times 420}{415 \times 64} = \frac{8 \times 10 \times 105 \times 4}{415 \times 8 \times 4 \times 2}$

$= \frac{1050}{830} = \frac{105}{83}$. Ainsi F . f : : 105 . 83 ; c'est-à-dire que l'écu de France est au florin de Francfort, comme 105 est à 83 ; par conséquent 83 écus de France valent 105 florins de Francfort. Dites présentement, si 83 écus de France valent 105 florins de Francfort, combien 166 écus de France vaudront-ils de florins de Francfort ? Cela donne cette proportion 83 . 105 : : 166 . $x$ : en divisant le produit des moyens 105 × 166 par le premier terme 83, on trouvera $x = 210$ ; c'est-à-dire ; que 166 écus de France valent 210 florins de Francfort.

De ce que F . f : : 105 . 83, j'ai conclu que 83 écus de France valoient 105 florins de Francfort ; en voici la preuve. Faites le produit des extrêmes & celui des moyens ; vous aurez $F \times 83 = 105 \times f$, ou $F = \frac{105f}{83}$, ce qui signifie que 1 écu de France vaut $\frac{105}{83}$ de florins de Francfort ; donc 83 fois un écu de France = 83 fois $\frac{105}{83}$ de Francfort, c'est-à dire, que 83 écus de France = 105 florins de Francfort ; C. Q. F. D. (*a*).

Quand on a résolu un Problême, il est facile de donner les règles de sa Résolution ; il n'y a qu'à

(*a*) Remarquez qu'il n'est pas besoin d'ajouter une Démonstration à la Résolution des Problêmes que nous proposons ici. Chaque partie de la Résolution se démontrant à mesure qu'elle avance, il est clair qu'il n'y a plus rien à démontrer, quand on est arrivé à une solution entière : c'est pour cela que la méthode des Mathématiciens est si propre à étendre l'intelligence ; il faut qu'elle soit continuellement en exercice, par l'obligation où est l'esprit à chaque pas qu'il fait, de se rendre compte de ses démarches.

revenir sur ce que l'on a fait pour le résoudre, développer la règle contenue dans le dernier résultat & l'énoncer.

Si les Inventeurs de certaines Règles d'Arithmétique nous disoient le chemin qu'ils ont tenu lorsqu'ils les ont découvertes, ils délivreroient les Lecteurs, qui font usage de leur raison, de l'embarras où ils sont très-souvent de concevoir comment on a pû découvrir des Règles quelquefois très compliquées, auxquelles l'état de la question ne paroît point devoir conduire. L'Algèbre ou l'Analyse révèle tous ces mystères; elle montre tous les degrés par où l'on a passé, & que les Inventeurs ont supprimés, pour ne produire que le dernier résultat d'où ils ont déduit la Règle, comme je le ferai voir particulièrement, en examinant la Résolution du Problème suivant, qui n'est pas moins utile que curieux.

Une pièce d'Artillerie, telle qu'un canon qui n'est plus en état de servir, ne laisse pas d'être de quelque utilité. La matière en est bonne à refondre; on peut en faire de nouvelles pièces. Celles dont il est ici question, sont composées de *Rosette*, appellée communément *Cuivre rouge*, & *d'Etain* fin d'Angleterre. De l'alliage de ces deux métaux il en résulte un métal que l'on appelle *Fonte*. On conçoit bien que les métaux qui composent la fonte, doivent avoir entr'eux une certaine proportion. Chaque fondeur a la sienne; mais ceux qui se sont rendus les plus attentifs à l'expérience, suivent la proportion de 100 à 12, c'est-à-dire, que sur 100 livres de rosette, ils mettent 12 livres d'étain; & l'on trouve que le métal qui en résulte, n'est ni trop aigre ni trop doux: une autre proportion le rend ou trop cassant ou trop mou.

Ainsi, comme l'on peut ignorer, quand on

fond des pièces d'artillerie, la proportion dont on a fait uſage dans leur première fonte, il s'agit de la découvrir.

L'expérience prouve qu'un corps plongé dans l'eau perd quelque choſe de ſa peſanteur (*a*). Les Phyſiciens ont déterminé la quantité de cette perte; elle varie, ſuivant la différente peſanteur des corps, ſous un même volume, c'eſt-à-dire, de même groſſeur : on a obſervé que *la roſette perd dans l'eau la neuvième partie de ſon poids, & que l'étain fin en perd la ſeptième partie.* Nous allons faire uſage de ce principe, pour déterminer la quantité de roſette, & celle d'étain, qui compoſent la fonte dont la proportion de l'alliage eſt inconnue.

## PROBLÊME.

269. Un morceau de fonte, ou bien un tron-

(*a*) *L'expérience prouve qu'un corps plongé dans l'eau perd quelque choſe de ſa peſanteur.* Il eſt certain que les parties ſupérieures de l'eau ſont ſoutenues par les inférieures, & que celles-ci le ſont par le fond du vaiſſeau qui les contient, puiſque ces parties de l'eau poſent immédiatement les unes ſur les autres.

Ainſi, quand on plonge dans l'eau un corps ſolide, ce corps chaſſe l'eau, il prend la place d'un volume d'eau égal au ſien : or ce volume d'eau chaſſé étoit ſoutenu par les parties qui l'avoiſinoient; donc le corps ſolide, qui en prend la place, ſera auſſi ſoutenu par les mêmes parties : ce ſolide, que je ſuppoſe plus peſant qu'un pareil volume d'eau, étant ſoutenu, pèſera donc moins qu'il ne peſoit lorſqu'il n'étoit pas ſoutenu, ainſi que l'expérience nous l'apprend.

Je dis plus. La perte de la peſanteur du corps ſolide plongé dans l'eau, doit être préciſément égale au poids du volume d'eau dont le ſolide occupe la place : car ſuppoſons que le volume d'eau, dont le ſolide occupe la place, pèſe une livre; les parties d'eau qui l'avoiſinoient, ſoutenoient donc une livre peſant, ou, ce qui eſt la même choſe, faiſoient l'effort d'une livre contre ce volume d'eau, & l'empêchoient de deſcendre. Par conſéquent le ſolide mis en la place du volume d'eau, ſouffrira le même effort de la part des mêmes parties qui l'environnent : cet effort eſt d'une livre; le corps ſolide trouve donc la réſiſtance d'une livre à vaincre en deſcendant dans l'eau, & par conſéquent il eſt néceſſaire qu'il perde une livre de ſa peſanteur, puiſqu'on lui réſiſte en ſens contraire avec une livre.

La perte que fait un ſolide plongé dans l'eau, eſt donc égale au poids du volume d'eau dont ce ſolide occupe la place; d'où l'on voit que l'on peut connoître le poids d'un volume d'eau quelconque, ſans qu'il ſoit beſoin de peſer l'eau immédiatement.

çon d'une pièce d'artillerie étant donné, trouver la quantité de roſette & d'étain, qui en fait l'alliage.

## RÉSOLUTION.

Peſez bien exactement dans l'air le tronçon propoſé. Suppoſons que ſon poids ſoit de 80 livres, vous le pèſerez enſuite dans l'eau, c'eſt-à-dire, qu'en le peſant il ſera plongé dans l'eau, tandis que le poids qui ſera équilibre avec lui, ſera en l'air; remarquez combien il perd de ſa peſanteur. Qu'il en perde, par exemple, 9 livres & $\frac{1}{3} = \frac{28}{3}$.

Après ces obſervations, appellez R la quantité de roſette qui eſt dans le tronçon. Nommez auſſi E la quantité d'étain qui eſt entré dans la compoſition de ce même morceau, & reprenez l'état de la queſtion, c'eſt-à-dire, rappellez-vous les conditions du Problême. La première eſt que le tronçon pèſe 80 livres en plein air; les deux portions de roſette & d'étain, dont il eſt compoſé, pèſent donc enſemble 80 livres : ainſi l'on a cette équation $R + E = 80$.

La ſeconde condition conſiſte en ce que les deux quantités de roſette & d'étain, réunies en une ſeule maſſe, perdent dans l'eau $\frac{28}{3}$ de leur peſanteur totale. Or, par le principe d'expérience des métaux peſés dans l'eau, la roſette perd la neuvième partie de ſon poids; ſa perte eſt donc $\frac{R}{9}$; & l'étain en perd ſa ſeptième partie : ainſi on doit exprimer ſa perte par $\frac{E}{7}$. Ces deux pertes enſemble valent la perte totale $\frac{28}{3}$ de la maſſe entière; par conſéquent il vient cette autre équation, $\frac{R}{9} + \frac{E}{7} = \frac{28}{3}$; & toutes les conditions du Problême ſont exprimées.

Tâchons préſentement de dégager les grandeurs inconnues R, E, afin de les rendre égales à des

quantités connues. Commençons par faire évanouir les fractions de l'équation $\frac{R}{9} + \frac{E}{7} = \frac{28}{3}$, en multipliant l'un & l'autre membre par $9 \times 7$, ce qui produira $7\,R + 9\,E = \frac{9 \times 7 \times 28}{3} = \frac{3 \times 3 \times 7 \times 28}{3} = 3 \times 7 \times 28 = 21 \times 28 = 588$ : ainsi $7\,R + 9\,E = 588$.

Et si nous revenons à la première équation $R + E = 80$, en transposant E, nous aurons $R = 80 - E$ : donc $7 \times R = 7 \times \overline{80 - E}$; c'est-à-dire, $7\,R = 560 - 7\,E$. En la place de 7 R mettons sa valeur $560 - 7\,E$ dans l'équation $7\,R + 9\,E = 588$, il nous viendra $560 - 7\,E + 9\,E = 588$, ou $560 + 2\,E = 588$; & en transposant 560, cette équation deviendra $2\,E = 588 - 560 = 28$ : or, puisque $2\,E = 28$, on aura donc $E = 14$; c'est à-dire, qu'il y a 14 livres d'étain dans le tronçon proposé, & par conséquent 66 livres de rosette, puisque ces deux quantités font ensemble 80 livres : c'est la première condition du Problême; & que la septième partie de $14 = 2$, jointe à la neuvième partie de $66 = 7 + \frac{3}{9}$ ou $\frac{1}{3}$, produit 9 livres & $\frac{1}{3}$, qui est la perte totale du tronçon, suivant la seconde condition du Problême.

Sur 66 livres de rosette, il y a donc 14 livres d'étain dans le morceau de fonte proposé; c'est beaucoup trop; puisqu'il ne faut que 12 livres d'étain sur 100 livres de rosette. Par conséquent, afin que cet alliage devienne conforme aux expériences les plus reçues, on y ajoutera la quantité de rosette nécessaire pour qu'elle ait avec l'étain la proportion de 100 à 12. Ainsi l'on fera ce raisonnement : *Puisque* 12 *livres d'étain exigent* 100 *livres de rosette*, *combien* 14 *livres d'étain demandent-elles de*

*roſette?* Cette queſtion ſe réſout par une Règle de Trois, qui donne 116 livres & $\frac{2}{3}$ de roſette pour 14 livres d'étain : il y a déja dans la fonte en queſtion 66 livres de roſette ; c'eſt par conſéquent 50 livres & $\frac{2}{3}$ de roſette qu'il faut y ajouter, afin que la roſette & l'étain, qui compoſent cette fonte, ſoient dans la proportion la plus reçue.

Mais ce Problême n'eſt réſolu que pour un cas particulier. Rendons la réſolution générale. Soit la peſanteur de la fonte propoſée $= f$, ſa perte dans l'eau $= p$. Soit auſſi $= x$ la quantité inconnue de roſette qui en compoſe l'alliage, $b$ la perte d'une quantité de roſette égale en peſanteur au morceau de fonte. Appellons auſſi $y$ la quantité inconnue d'étain, $c$ la perte d'une quantité d'étain égale en peſanteur au morceau de fonte.

1°. Puiſque les deux quantités inconnues de roſette & d'étain, miſes enſemble, compoſent le morceau de fonte, on aura cette équation, $x + y = f$.

2°. Pour trouver l'expreſſion de la perte de chaque quantité inconnue, ſuppoſons d'abord un morceau de pure roſette égal en peſanteur au tronçon de fonte ; la perte de la quantité inconnue de roſette doit être proportionnée à la perte d'un morceau de pure roſette égal en peſanteur au tronçon de fonte : ainſi l'on a cette proportion ; le morceau de pure roſette égal en peſanteur au tronçon de fonte eſt à ſa perte $b$ dans l'eau, comme la quantité inconnue $x$ de roſette eſt auſſi à ſa perte dans l'eau, ou plus ſimplement $f. b :: x. \frac{bx}{f}$, qui eſt l'expreſſion de la perte que fait dans l'eau la quantité inconnue de roſette.

En ſuivant cette même méthode, c'eſt-à-dire, en conſidérant un morceau de pur étain égal en peſanteur au tronçon de fonte, on fera cette au-

tre proportion : le morceau de pur étain égal en pesanteur au tronçon de fonte $f$, est à sa perte $c$ dans l'eau, comme la quantité inconnue $y$ d'étain est à sa perte dans l'eau, ou $f . c :: y . \frac{cy}{f}$, où l'on voit que $\frac{cy}{f}$ est l'expression de la perte que fait dans l'eau la quantité inconnue d'étain : or les deux pertes des deux quantités inconnues sont égales à la perte totale $p$; par conséquent on a encore cette autre équation, $\frac{bx}{f} + \frac{cy}{f} = p$, & le Problême est mis en équation : il ne reste plus qu'à dégager les inconnues.

Reprenons la première équation, $x + y = f$; donc, en transposant, $x = f - y$; &, en faisant évanouir les fractions de l'équation, $\frac{bx}{f} + \frac{cy}{f} = p$, nous aurons $bx + cy = fp$; donc, en substituant dans cette dernière équation, en la place de $x$, sa valeur $f - y$, on aura $bf - by + cy = fp$: ainsi, en transposant, $cy - by = fp - bf$, ou $c - b \times y = p - b \times f$, d'où l'on tire cette proportion, $c - b . p - b :: f . y$; cela signifie que l'on aura la quantité d'étain qui est dans la fonte, en cherchant une quatrième proportionnelle aux trois termes connus $c - b, p - b, f$.

Car $c$ est la perte que fait dans l'eau une masse d'étain égale en pesanteur au tronçon de fonte $= 80$ livres ; & l'on sçait par l'expérience que l'étain perd dans l'eau la septième partie de son poids : ainsi sa perte $c = \frac{80}{7}$. Par le même principe d'expérience, la perte $b$ d'une masse de rosette pesant 80 liv. est la neuvième partie de son poids ; d'où il suit que $b = \frac{80}{9}$ : de plus (par la supp.) la perte $p$ du tronçon de fonte est $\frac{28}{3}$ de livre ; ainsi $p = \frac{28}{3}$, & le poids de la fonte $f = 80$ livres. Si l'on substitue donc en la place des lettres $c, b, p, f$, leur

valeur correſpondante $\frac{80}{7}$, $\frac{80}{9}$, $\frac{28}{3}$, 80, dans la proportion $c - b . p - b :: f . y$, elle ſe changera en celle-ci, $\frac{80}{7} - \frac{80}{9} . \frac{28}{3} - \frac{80}{9} :: 80 . y$, où les trois premiers termes ſont exprimés en chiffres : il n'y a donc qu'à multiplier les deux termes moyens $\frac{28}{3} - \frac{80}{9}$, 80, l'un par l'autre, & diviſer le produit $\frac{320}{9}$ par le premier terme $\frac{80}{7} - \frac{80}{9} = \frac{160}{7 \times 9}$ (en donnant à ces deux fractions la même dénomination), & l'on aura $\frac{320}{9} \times \frac{160}{7 \times 9} = \frac{32 \times 10 \times 7 \times 9}{9 \times 16 \times 10} = \frac{32 \times 7}{10} = \frac{2 \times 16 \times 7}{16} = 2 \times 7 = 14$; comme ci-deſſus, pour la quantité d'étain $y$ dont eſt compoſé le morceau de fonte.

Si nous n'avions pas voulu voir les degrés qui nous ont conduits à la réſolution de ce Problême, voici la règle que nous aurions pû donner, afin que l'on trouve dans tous les cas poſſibles la quantité d'étain ou de roſette, qui compoſent l'alliage du tronçon propoſé. Pour déterminer, par exemple, la quantité d'étain, faites cette Règle de Trois : *La perte que fait dans l'eau une maſſe d'étain égale en peſanteur au tronçon de fonte, moins la perte que fait dans l'eau une maſſe de roſette égale auſſi en peſanteur au tronçon de fonte, eſt à la perte que fait dans l'eau le tronçon de fonte, moins la perte que fait dans l'eau la maſſe de roſette égale en peſanteur au tronçon de fonte, comme la peſanteur du tronçon de fonte eſt à un quatrième terme qui donnera la quantité d'étain cherchée :* car c'eſt ce que ſignifie la dernière proportion, $c - b . p - b :: f . y$, où nous ſommes parvenus en dernier reſſort, en comparant par ordre les différens rapports des quantités données (*a*).

(*a*) Ce Problême eſt célèbre ſous le nom de *la Couronne de Hiéron*. L'occaſion qui l'a fait naître, mérite d'être rapportée. Hiéron, Roi de Syracuſe, ordonna à un Orfèvre de lui faire une Couronne d'or. Le

N'oublions pas d'obſerver que l'on ne pourroit réſoudre ce Problême que par une ſorte de hazard,

Prince fournit la quantité de matière qui devoit y entrer. Mais Hiéron, fort content de l'ouvrage, le fut très peu de l'ouvrier, dont la probité ne lui parut pas ſans reproche. Quoique, expérience faite, la Couronne fût trouvée poids pour poids de l'or qui avoit été fourni, il ſoupçonna l'alliage d'un métal étranger.

Cependant, en cas que l'Orfèvre eût falſifié la matière, il n'étoit pas aiſé de l'en convaincre; le Roi ne vouloit pas que l'on détruisît la Couronne, elle étoit de ſon goût. La queſtion fit du bruit. On la propoſa à tous les Mathématiciens de ce tems-là; elle ſe réduiſoit *à déterminer, ſans endommager en rien l'ouvrage de la Couronne, la quantité de matière différente de l'or que l'on auroit pû y mêler.*

Archimède, parent & ami de Hiéron, dut être un des premiers qui en eût connoiſſance; mais on ne ſçauroit guères douter que les Géomètres de Syracuſe, & même tous ceux de la Grèce, n'aient travaillé de toutes leurs forces à la Réſolution d'un Problême ſi ſingulier. Une queſtion auſſi nouvelle & auſſi difficile devoit être un appât pour cette eſpèce d'hommes qui ne ſont amoureux que des difficultés.

Néanmoins il eſt vraiſemblable que la Réſolution de ce Problême ſe fit attendre aſſez long-tems. Il n'en parut qu'une ſeule, & même depuis environ deux mille ans, on n'en a point vû d'autre, elle étoit d'Archimède. Apparemment cette queſtion l'avoit extrêmement tourmenté; elle le pourſuivoit partout; ce fut au bain que les principes de ſa réſolution, ou, comme s'expriment les Géomètres, les données de ce Problême ſe préſentèrent à ſon eſprit. Il s'apperçût qu'étant dans l'eau, ſon corps perdoit de ſon poids; réfléchiſſant tout à-coup ſur cette idée, il entrevit la réſolution de ſon Problême. L'imagination allumée, & comme tranſporté de l'eſprit de ſa découverte, il ſe jette hors du bain, court tout nud par les rues de Syracuſe en criant, *je l'ai trouvé*, & ſe rend chez lui pour mettre ſur le papier les idées qui l'agitoient, ou pour s'aſſurer de la vérité de ſes préſomptions, qui ſe trouvèrent effectivement conformes à ce qu'il en eſpéroit.

Voici donc comment Archimède s'y prit, pour prouver que la matière de la Couronne avoit été altérée. Il prit une maſſe d'or pur, égale en peſanteur à celle de la Couronne; ces deux maſſes étant peſées en plein air, il les peſa dans l'eau, où elles ne conſervèrent plus d'équilibre: d'où il conclut d'abord, ſelon le principe d'expérience rapporté ci-deſſus que la matière de la Couronne étoit falſifiée.

Mais pour en venir à une ſolution parfaite, c'eſt-à-dire, pour déterminer la quantité de matière étrangère que l'Orfèvre avoit pû mêler avec l'or, s'étant douté que ce pouvoit n'être que de l'argent; il prit encore une maſſe de pur argent de même poids que la Couronne, & comparant enſemble les pertes que faiſoient dans l'eau ces trois différentes matières de même poids, il parvint à découvrir, comme nous avons fait, la quantité de l'argent mêlé avec l'or; ce qui fut confirmé par l'aveu de l'Orfèvre, aveu, dont on n'avoit pourtant pas abſolument beſoin, ſi ce n'eſt pour atteſter qu'il n'y avoit d'autre alliage que de l'argent: car, en ſuppoſant que l'on eût mêlé avec l'or deux autres métaux, comme de l'argent & du cuivre, le Problême auroit été indéterminé, ainſi que nous le démontrons à l'article qui ſuit la réſolution générale, que nous avons donnée du Problême auquel appartient cette Note.

si l'on ignoroit l'espèce & le nombre des métaux

On voit par-là qu'Archimède étoit en possession de se démêler des questions les plus épineuses des Mathématiques. Le Problême de *la Couronne d'Hiéron* étoit très difficile : il fallut qu'Archimède se créât, pour ainsi dire, des données. Sa résolution ne dépend point d'une méthode nouvelle, d'une Géométrie, d'un calcul particulier, inventés par d'autres, & connus d'un petit nombre de Géomètres : elle est purement de génie.

De la manière dont le Problême fut proposé par Hiéron, il n'y avoit de donnée que le poids de la Couronne. Archimède eut à découvrir, 1°. Que les métaux perdoient de leur poids dans l'eau. 2°. Qu'ils en perdoient selon la différente pesanteur des métaux sous le même volume. 3°. Il fallut qu'il s'avisât de comparer les pertes des deux masses, l'une d'or pur, & l'autre de l'argent pur de même poids que la Couronne. Tout cela étoit entièrement neuf de son tems. Les Géomètres ses Contemporains en sont une preuve évidente : ils ne produisirent rien d'approchant de sa découverte sur ce sujet ; il fut le seul, & deux mille ans qui se sont écoulés depuis, ne lui ont pas donné un seul concurrent.

Je ne sais si les loix de l'hydrostatique, c'est-à-dire, de la science qui enseigne le rapport de la pesanteur des différens fluides, & leur action contre les corps solides qui y sont plongés, je ne sais pas, dis-je, si les loix de cette science étoient découvertes avant Archimède ; mais il est sûr qu'il nous en a donné tout le fonds dans son Traité *De insidentibus humido* ; & peut-être est-ce à la Résolution du Problême proposé par Hiéron, que nous en sommes redevables. Si ce Traité eût existé, il me semble que la question du Roi de Syracuse ne l'eût pas tant embarrassé ; Archimède y eût trouvé la plus grande partie des données de son Problême.

Ceux qui disent que l'on résout aujourd'hui d'un trait de plume ce qui lui a tant coûté, comme le Problême de l'*Analyse des métaux*, me permettront de leur faire considérer, que l'on ne résout point véritablement ce qui est résolu depuis deux mille ans ; qu'Archimede est le seul qui ait résolu ce Problême ; & que c'est se faire une illusion bien étrange que de prétendre donner une résolution, quand on ne fait que la copier ou l'expliquer.

Je ne sçaurois donc approuver l'espèce de raillerie qu'un bel esprit a faite à ce sujet : *Les Géomètres d'aujourd'hui ne sont pas*, dit-il, *aisés à contenter sur les difficultés ; & ce qui a fait sortir Archimède du bain pour crier par les rues de Syracuse*, JE L'AI TROUVÉ, *ne feroit pas pour eux une découverte bien glorieuse*. Avec tout le respect dû au célèbre Panégyriste des Modernes, elle seroit très-glorieuse, même aujourd'hui ; c'est qu'elle est totalement indépendante des nouvelles méthodes : l'application de l'Algèbre à la Géométrie, le calcul différentiel & intégral n'y serviroient de rien ; sans un coup de génie on n'en viendroit pas à bout, & ces coups sont rares : le nombre des génies, qui ne doivent rien aux autres, est fort petit. Presque tous nos Modernes ont établi leur réputation, en faisant usage de découvertes qui ne leur appartenoient pas ; mais Archimède a élevé la sienne sur des fondemens dont il a été l'Inventeur. Une nouvelle méthode dans les sciences est comme une nouvelle machine dans les arts : elle procure plus de commodités ; mais suppose-t-elle absolument plus de génie, ou plus de force réelle à ceux qui en font usage ?

qui compoſent un alliage dont il s'agit de faire l'analyſe. L'Orfèvre, dont nous avons parlé dans la note (*a*), auroit très certainement mis en défaut le Roi & le Géomètre de Syracuſe, en compoſant ſon alliage de trois ou quatre métaux; puiſque, 1°. Il auroit fallu qu'Archimède eût deviné l'eſpèce des métaux, afin d'en comparer les différentes pertes dans l'eau. 2°. Qu'il en eût imaginé le nombre; & même, tout cela ſuppoſé, il ne lui auroit pas été poſſible de déterminer abſolument la quantité préciſe de chaque matière : car, en reprenant notre Problème, ſuppoſons que le morceau de fonte ſoit compoſé de roſette, d'étain, & de fer $=$ F, qui perd dans l'eau la huitième partie de ſon poids; ces trois métaux réunis pèſent 80 livres (par la ſupp.) : ainſi $R + E + F = 80$. Secondement, leur perte totale étant $\frac{28}{5}$, on aura cette autre équation, $\frac{R}{9} + \frac{E}{7} + \frac{F}{8} = \frac{28}{5}$; & ces deux équations expriment toutes les conditions du Problème.

Si l'on fait maintenant évanouir les fractions de la ſeconde équation, elle deviendra $56\,R + 72\,E + 63\,F = 4704$; & de l'équation $R + E + F = 80$, on tire $R = 80 - E - F$; & multipliant l'un & l'autre membre de cette équation par 56, l'on a $56\,R = 4480 - 56\,E - 56\,F$. Subſtituons préſentement la valeur de $56\,R$ dans l'équation $56\,R + 72\,E + 63\,F = 4704$, elle deviendra $4480 - 56\,E - 56\,F + 72\,E + 63\,F = 4704$, d'où l'on a, en effaçant ce qui ſe détruit, $4480 + 16\,E + 7\,F = 4704$; & tranſpoſant 4480, l'équation devient $16\,E + 7\,F = 224$, où il y a encore les deux inconnues E, F, que l'on ne ſauroit faire évanouir, parce qu'il n'y a rien dans la queſtion qui détermine le rapport d'E à F ou à R, ni de F à R. Le Problème

eſt donc indéterminé, c'eſt à dire qu'il peut avoir différentes ſolutions.

Car ſuppoſons qu'il y ait 4 livres de Fer dans le morceau de fonte propoſé, on aura F = 4. Donc 7 F = 28. Ainſi l'équation 16 E + 7 F = 224, deviendra 16 E + 28 = 224; donc 16 E = 224 — 28 = 196. Ainſi E = $\frac{196}{16}$ = 12 $\frac{1}{4}$; ce qui ſignifie que dans ce cas il y a 12 livres & un quart d'étain, & par conſéquent 63 livres & $\frac{1}{4}$ de roſette, puiſque ces trois quantités réunies donnent 80 livres, & que la huitieme partie de 4 livres, plus la neuvieme partie de 63 livres & $\frac{1}{4}$, avec la ſeptieme partie de 12 livres $\frac{1}{4}$, produiſent 9 livres & $\frac{1}{3}$ ou $\frac{28}{3}$, qui eſt la perte totale que font dans l'eau ces trois maſſes fondues en une ſeule.

Si l'on fait une autre ſuppoſition, on pourra trouver encore une autre ſolution. Soit la quantité de fer F = 3; donc 7 F = 21 : alors l'équation 16 E + 7 F = 224, ſe changera en celle-ci, 16 E + 21 = 224. Donc 16 E = 224 — 21 = 203; d'où l'on tire E = $\frac{203}{16}$ = 12 + $\frac{11}{16}$. En ſuppoſant donc qu'il y ait 3 livres de fer dans le morceau de fonte, on y trouvera 12 livres & $\frac{11}{16}$ d'étain, & par conſéquent 64 livres $\frac{5}{16}$ de roſette; car l'addition de ces trois quantités donne 80 livres pour la premiere condition du Problême; & la huitième partie de 3 livres, plus la ſeptième partie de 12 livres & $\frac{11}{16}$, avec la neuvième partie de 64 livres & $\frac{5}{16}$, donnent 9 livres & $\frac{1}{3}$ ou $\frac{28}{3}$, pour la ſeconde condition du Problême.

On pourroit faire un très grand nombre d'autres ſuppoſitions ſemblables qui produiroient le même effet, parcequ'en prenant un peu plus d'une eſpèce de métal, on en prendroit un peu moins d'une autre, ce qui ſe compenſeroit: car, ſi l'on détermine l'une des trois quantités, l'équation indiquera toujours

combien il en faut prendre des deux autres.

Quoique l'on puiſſe faire un très-grand nombre de ſuppoſitions, qui toutes aboutiſſent au même réſultat, il ne faut pas s'imaginer que le nombre en ſoit totalement arbitraire; il eſt renfermé entre certaines bornes qui ſont déterminées par l'équation.

Reprenons donc l'équation $16\,E + 7\,F = 224$ : je dis que l'on ne peut pas ſuppoſer que $F = 32$ livres, c'eſt-à-dire qu'il y ait 32 livres de fer dans le morceau de fonte propoſé, puiſque l'équation $16\,E + 7\,F = 224$ devenant alors $16\,E + 7 \times 32 = 224$, ſe changeroit en celle-ci, $16\,E + 224 = 224$, d'où l'on tire $16\,E = 224 - 224 = 0$; ce qui ſignifie que ſeize fois la quantité d'étain eſt égale à rien, ou, pour parler plus naturellement, qu'il n'y a point d'étain dans l'alliage en queſtion; ce qui eſt contre la ſuppoſition.

On ne peut donc pas ſuppoſer qu'il y ait juſqu'à 32 livres de fer; & c'eſt ce que l'on appelle *une limite* que l'on ne ſauroit atteindre, ni même outrepaſſer, ſans tomber dans une contradiction; mais on peut prendre à volonté tous les nombres qui ſont au deſſous, entiers ou fractionnaires; ils ſatisferont à la queſtion.

J'avertirai encore que, ſi la fonte réſultoit de l'alliage de quatre métaux, le Problême ſeroit doublement indéterminé, & il le ſeroit triplement, s'il y en avoit cinq, &c. En un mot, on jugera qu'un Problême eſt indéterminé, lorſqu'il ne ſera pas poſſible d'avoir autant d'équations qu'il y a d'inconnues. Pour peu que l'on veuille s'y rendre attentif, on en découvrira la raiſon; une plus ample diſcuſſion appartient à un Traité particulier des équations, où l'on eſt obligé d'épuiſer la matiere, autant que le permet le progrès de la ſcience que l'on traite.

Il

Il y a des mesures dans l'Arpentage qui portent le même nom, lesquelles sont néanmoins fort différentes. On a déja dit que, pour les travaux Royaux, la perche contenoit 22 pieds, au lieu que la perche commune n'en a que 18. En mesurant un Terrein avec la perche Royale, on y trouvera moins d'arpens, que s'il avoit été mesuré avec la perche commune; mais aussi ces arpens seront plus grands. Dans les achats & les ventes des Terreins, il faut toujours spécifier la perche, dont on a fait usage pour les évaluer. C'est alors que l'on a besoin assez souvent de transformer les arpens Royaux ou les perches Royales, en arpens communs ou en perches communes, & réciproquement les communes en Royales : car pour les toises, les pieds, les pouces, &c. il n'y a point de variation.

## PROBLÊME.

On a trouvé qu'un Terrein, mesuré avec une perche de 22 pieds, contient 1 arpent, 70 perches, 0 toises, 30 pieds, 75 pouces quarrés; si on l'avoit mesuré avec une toise de 18 pieds, combien auroit-on trouvé d'arpens, de perches, &c.?

## RÉSOLUTION.

1°. On commencera par chercher le rapport de l'arpent Royal = A, à l'arpent commun = $a$, en disant : puisque la perche Royale = 22 pieds, cette perche quarrée = $22 \times 22 = 484$ pieds quarrés : il y a 100 perches quarrées dans l'arpent; ainsi l'arpent Royal A = $484 \times 100 = 48400$ pieds quarrés.

Présentement, la perche commune = 18 pieds; donc la perche quarrée commune = 324 pieds

quarrés; & l'arpent commun $a = 32400$ pieds quarrés.

Par conſéquent $A . a :: 48400 . 32400$; & (en diviſant par 400, pour réduire à la plus ſimple expreſſion) on trouve que $A . a :: 121 . 81$, ou que $81\,A = 121\,a$, c'eſt à dire que 81 arpens Royaux valent 121 arpens communs.

2°. Ce rapport une fois déterminé, on procédera à la Réſolution entière du Problême, en obſervant d'abord que l'on ne doit faire attention qu'aux arpens & aux perches quarrées, tout le reſte étant égal dans les deux meſures. Or 1 arpent & 70 perches $= \frac{170}{100}$ d'arpent (à cauſe qu'un arpent $= 100$ perches quarrées); par conſéquent on doit dire; ſi 81 arpens Royaux produiſent 121 arpens communs (ainſi qu'on l'a vû Art. 1.), combien $\frac{170}{100}$ d'arpent Royal produiront-elles d'arpens communs? C'eſt une Règle de Trois, où l'on ſçait qu'il faut multiplier $\frac{170}{100}$ par 121, & en diviſer le produit $\frac{20570}{100}$ par 81, pour avoir $\frac{20570}{8100} = 2$ arpens communs $+ \frac{4370}{8100}$ d'arpent. L'arpent $= 100$ perches quarrées; en multipliant donc la fraction précédente par 100, on aura $\frac{437000}{8100}$ de perche quarrée, leſquelles $= \frac{4370}{81} = 53$ perches quarrées $+ \frac{77}{81}$ de perche quarrée. Mais la perche quarrée $= 9$ toiſes quarrées; multipliant donc $\frac{77}{81}$ par 9, on aura $\frac{693}{81}$ de toiſe quarrée $= 8$ toiſes quarrées $+ \frac{45}{81}$ ou $\frac{5}{9}$ de toiſe quarrée, laquelle dernière fraction multipliée par 36 (parce qu'une toiſe quarrée $= 36$ pieds quarrés) produira $\frac{180}{9} = 20$ pieds quarrés.

De manière que 1 arpent Royal & 70 perches quarrées Royales $= 2$ arpens, 53 perches, 8 toiſes, 20 pieds de meſure commune; & en y joignant les 30 pieds & les 75 pouces négligés, on verra que 1 arpent, 70 perches, 30 pieds, 75 pouces Royaux, feront, en meſures communes,

2 arpens, 54 perches, 14 pieds & 75 pouces quarrés; C. Q. F. T. & D.

Pour ſe convaincre de la juſteſſe de ce calcul, on renverſera la queſtion, en demandant ce que vaudroient 2 arpens, 54 perches, 14 pieds, & 75 pouces quarrés communs, ſi on les réduiſoit à la perche Royale.

On mettra à part, comme ci-deſſus, les 14 pieds & 75 pouces, qui ne font aucune difficulté, & l'on ſe rappellera que 1 arpent = 100 perches quarrées; qu'ainſi une perche quarrée = $\frac{1}{100}$ d'arpent: par conſéquent 2 arpens & 54 perches = 2 + $\frac{54}{100}$ d'arpent = $\frac{254}{100}$ d'arpent; après quoi on fera ce raiſonnement: puiſque (Art. 1.) 121 arpens communs ſe réduiſent à 81 arpens Royaux, à combien d'arpens Royaux ſe réduiront $\frac{254}{100}$ d'arpent commun? En multipliant (ſelon la règle de trois) $\frac{254}{100}$ par 81, & diviſant le produit $\frac{20574}{100}$ par 121, on aura pour le quotient $\frac{20574}{12100}$ d'arpent Royal, leſquelles = 1 arpent + $\frac{8474}{12100}$ d'arpent Royal. En multipliant cette fraction par 100 (parce que 1 arpent = 100 perches quarrées), elle deviendra = $\frac{847400}{12100}$ de perche quarrée = $\frac{8474}{121}$ = 70 perches quarrées + $\frac{4}{121}$ de perche quarrée, qu'il faut réduire en pieds quarrés. Or la perche quarrée Royale = 22 pieds × 22 pieds = 484 pieds quarrés; multipliant les $\frac{4}{121}$ de perche quarrée par 484, on aura $\frac{1936}{121}$ de pied quarré = 16 pieds quarrés: enſorte que 2 arpens, 54 perches communes = 1 arpent, 70 perches & 16 pieds quarrés Royaux. Que l'on y ajoute à préſent les 14 pieds & 75 pouces quarrés qu'on a laiſſés là; on verra que 2 arpens 54 perches, 14 pieds, & 75 pouces, en meſure commune, ſe réduiſent à 1 arpent, 70 perches, 30 pieds, & 75 pouces Royaux, ainſi qu'on devoit le retrouver; C. Q. F. P.

## PROBLÊME.

270. Trouver la ſomme d'une progreſſion Géométrique deſcendante d'un nombre de termes infini (*a*), tel que $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} 2 . 1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{1}{8} . \frac{1}{16}$, &c.

## RÉSOLUTION.

Pour bien comprendre la réſolution de ce Problême, exprimons-le algébriquement : ſuppoſons la progreſſion $a . b :: b . c :: c . d :: d . g$, &c. dont il s'agit de trouver la ſomme $s$. Remarquez que la ſomme des antécédents eſt compoſée de tous les termes moins le dernier $g$; & que la ſomme des conſéquents eſt auſſi compoſée de tous les termes moins le premier $a$ : ainſi la ſomme des antécédents $= s - g$; celle des conſéquents $= s - a$. Or il a été démontré (n°. 258.) qu'une ſuite de rapports ou une progreſſion étant donnée, la ſomme des antécédents eſt à la ſomme des conſéquents, comme un antécédent quelconque eſt à ſon conſéquent; donc $s - g . s - a :: a . b$ : ainſi $b s - b g = a s - a a$; & comme l'on ſuppoſe $a > b$, à cauſe que la progreſſion eſt deſcendante, on aura, en tranſpoſant, $a a - b g = a s - b s$ : diviſant l'un & l'autre membre par $a - b$, il vient $\frac{a a - b g}{a - b} = s$; cela ſignifie que la ſomme $s$ de tous les termes d'une progreſſion finie deſcendante, eſt égale au quarré du premier terme, moins le produit du ſecond par le dernier, le tout diviſé par la différence du premier au ſecond. Ainſi la ſomme de tous les termes de la progreſſion finie $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} 2 . 1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{1}{8} . \frac{1}{16}$

(*a*) *L'infini.* Ce mot ne ſignifie pas une quantité exiſtante : car il n'y a point d'infini dans la nature; il exprime ſimplement la propriété qu'ont les nombres ou toutes les grandeurs, de pouvoir croître ou diminuer ſans fin.

$= \frac{4-1 \times \frac{1}{16}}{2-1} = \frac{64-1}{\frac{16}{1}} = \frac{63}{16} = 3 + \frac{15}{16}$. Ce que vous trouveriez encore, en faisant l'addition successive de tous les termes de la progression proposée : mais, outre que cette méthode ne résout que des cas particuliers, lorsque le nombre des termes de la progression est considérable, elle devient d'une longueur excessive, & même comme impossible, si l'on suppose que ce nombre croisse sans fin ; au lieu qu'avec l'équation formulaire $s = \frac{aa-bg}{a-b}$, on peut résoudre en un instant tous les cas possibles.

Car, en supposant le nombre des termes plus grand qu'aucune quantité imaginable, le dernier terme sera d'une petitesse si énorme qu'il pourra être négligé, je ne dis pas seulement sans une erreur sensible, mais même sans une erreur assignable ; il n'y a donc aucun inconvénient à supposer $g = 0$ : alors l'équation devient $s = \frac{aa}{a-b}$ (*a*) ; elle exprime la somme de tous les termes d'une progression descendante, dont le nombre des termes croît sans fin ; par conséquent la somme de tous les termes de la progression infinie descendante $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} 2 . 1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{4}$, &c. $= \frac{4}{2-1} = 4$.

(*a*) En supposant $g = 0$, l'équation $s = \frac{aa-bg}{a-b}$ devient $s = \frac{aa}{a-b}$. On conviendra bien que $g$ doit disparoître de l'équation ; mais l'on ne se borne pas à l'anéantissement de la quantité $g$ ; on extermine tout le terme $-bg$, qui est fort différent de la quantité $g$. Cela mérite effectivement d'être expliqué. Considérez donc que toute quantité qui multiplie zéro, ne peut donner que zéro ; ainsi 8 fois $0 = 0$ ; donc aussi $-b \times 0 = 0$ ; & par conséquent $g$ étant supposé $= 0$, on aura $-b \times g$ ou $-bg = 0$ : voilà pourquoi tout le terme $-bg$ s'anéantit par la supposition de $g = 0$.

271. Il paroît assez surprenant que la somme de tous les termes d'une progression infinie soit très-souvent une quantité fort petite ; vous trouverez, par exemple, en vous servant de la formule $s = \frac{a\,a}{a-b}$, que la somme des termes de la progression infinie descendante $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{64}$, &c. $= 1$. Cependant rien n'est plus clair, pour peu que l'on y fasse attention. Appliquons la progression à une quantité réelle, à l'étendue d'un pied ; prenons-en d'abord la moitié, ensuite la moitié du reste, c'est-à-dire, $\frac{1}{4}$ ; il ne reste plus que $\frac{1}{4}$ : prenons la moitié de ce quart ou $\frac{1}{8}$ ; il reste $\frac{1}{8}$ : prenons encore la moitié de ce huitieme de pied, & ainsi de suite, en prenant toujours la moitié de ce qui reste ; il est clair que ce procédé n'épuisera jamais le second demi-pied tout entier, & qu'il en peut approcher à l'infini sans pouvoir le passer ; par conséquent toutes les parties réunies, c'est-à-dire, la somme de tous les termes de la progression n'excédera jamais 1 pied : elle en sera même toujours éloignée de quelque chose, mais d'une distance inassignable ; ensorte que 1 pied est plutôt la *limite* de cette progression qu'il n'en est la somme. Néanmoins dans une division infinie, la somme & la limite se confondent, à cause que la quantité dont elles different, est plus petite qu'aucune grandeur assignable.

## *COROLLAIRE.*

272. Les deux premiers termes d'une progression infinie descendante étant donnés, on trouvera donc la somme de tous les termes de cette progression ; puisque, suivant la formule $s = \frac{a\,a}{a-b}$, cette somme est égale au quarré du premier terme divisé par la différence du premier au second.

Mais il n'en eſt pas de même d'une progreſſion infinie aſcendante, c'eſt-à-dire, dont les termes vont toujours en croiſſant; la ſomme de ces termes eſt inaſſignable, parce qu'elle n'a point de bornes: par exemple, il eſt impoſſible de trouver la ſomme de la progreſſion $\div$ 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32, &c. qui croît ſans fin, ou qui n'eſt renfermée dans aucunes limites.

Seulement, ſi le nombre de ſes termes étoit déterminé, & que l'on en donnât le premier, le ſecond & le dernier terme, on en trouveroit la ſomme, comme ci-deſſus. Car, en reprenant l'équation $bs - bg = as - aa$ du n°. 269, le ſecond terme $b$ étant ſuppoſé plus grand que le premier terme $a$, on trouvera, en tranſpoſant, $bs - as = bg - aa$, & $s = \frac{bg - aa}{b - a}$; c'eſt-à-dire, que la ſomme de tous les termes d'une progreſſion aſcendante qui n'eſt pas infinie, eſt égale au produit du ſecond terme par le dernier, moins le quarré du premier terme, le tout diviſé par la différence du ſecond terme au premier. En appliquant cette formule à une progreſſion numérique quelconque, on en trouvera la ſomme par la ſeule connoiſſance de ces trois termes, le premier, le ſecond & le dernier.

## *REMARQUE.*

J'ai dit (n°. 269.) que le dernier terme d'une progreſſion deſcendante, dont le nombre des termes croît ſans fin, pouvoit être ſuppoſé $= 0$: c'eſt qu'en ce cas le dernier terme de cette progreſſion eſt une fraction, dont le dénominateur eſt d'une grandeur énorme par rapport à ſon numérateur. Or, quand cela arrive, la quantité exprimée par cette fraction diſparoît aux ſens: par exemple, $\frac{1}{1000000000000}$ de pied, ou la cent billionième partie

d'un pied, n'eſt pas aſſignable en longueur; à plus forte raiſon une partie déſignée par une fraction incomparablement plus petite ſeroit-elle inaſſignable. Voilà pourquoi on la ſuppoſe égale au néant.

COROLLAIRE I. du n°. 272. Donc ſi d'une grandeur $b$ on ôte la moitié, après cela la moitié de ce qui reſte, & ainſi de ſuite ſans fin, on parviendra à un reſte plus petit qu'aucune grandeur donnée, ou à un reſte que l'on pourra regarder comme o. Car toutes les portions ſouſtraites formeront une progreſſion Géométrique infinie deſcendante; dont le premier terme $= \frac{b}{2}$, & le ſecond $= \frac{b}{4}$, étant connus, on trouvera (272.) que la ſomme de cette progreſſion $= b$. Or $b$ ôté de $b = o$; donc, &c. Ce qu'il faut bien remarquer.

COROLLAIRE II. du n°. 272. La ſomme $s$ d'une progreſſion Géométrique infinie deſcendante en raiſon quadruple, c'eſt-à dire, dont le premier terme eſt quadruple du ſecond, le ſecond quadruple du troiſième, & ainſi de ſuite; cette ſomme, dis je, eſt au premier terme $a$ de la progreſſion :: 4 . 3.

Pour le démontrer, reprenons l'équation $s = \frac{aa}{a-b}$ du n°. 272. Et comme on ſuppoſe le ſecond terme $b$ de la progreſſion égal au quart du premier terme $a$, on n'a qu'à mettre $\frac{a}{4}$, au lieu de $b$, dans l'équation $s = \frac{aa}{a-b}$; & l'on aura $s = \frac{aa}{a-\frac{a}{4}} = \frac{aa}{\frac{3a}{4}} = \frac{4aa}{3a} = \frac{4a}{3}$. Donc $s \times 3 = a \times 4$, ou $s . a :: 4 . 3$. Ce qu'il faut encore bien remarquer.

Quand la progreſſion Géométrique eſt aſcendante, on en peut déterminer aiſément la ſomme $s$,

ſans la connoiſſance du dernier terme, pourvû que l'on en connoiſſe ſeulement le premier $p$, le nombre des termes $n$, & l'expoſant $e$ de la progreſſion. On entend par l'*expoſant* d'une progreſſion, le nombre qui exprime combien de fois l'antécédent eſt contenu dans le conſéquent du rapport qui règne dans la progreſſion. Si l'on a, par exemple, la progreſſion Géométrique $\dddot{.}$ 2 . 6 . 18 . 54, &c. le rapport de deux termes conſécutifs étant toujours le même, par la nature de la progreſſion, celui de la propoſée eſt exprimée par la raiſon de 2 à 6; en diviſant donc 6 par 2, on a 3 pour l'*expoſant* de la progreſſion.

Ainſi quel que ſoit le ſecond terme $x$ d'une progreſſion Géométrique aſcendante, dont le premier terme eſt $p$, ſon expoſant $e = \frac{x}{p}$; donc le ſecond terme $x = pe$, & la progreſſion aſcendante devient $p . pe :: pe . \frac{p^2e^2}{p} = pe^2$ pour ſon troiſième terme; en continuant, on aura $pe . pe^2 :: pe^2 . \frac{p^2e^4}{pe} = pe^3$ qui en ſera le quatrième. Si l'on pourſuit en faiſant $pe^2 . pe^3 :: pe^3 . \frac{p^2e^6}{pe^2} = pe^4$, cette expreſſion $pe^4$ ſera le cinquième terme de cette progreſſion Géométrique aſcendante; laquelle s'exprimera plus ſimplement en écrivant $\dddot{.} p . pe . pe^2 . pe^3 . pe^4$, &c. où il faut bien remarquer, qu'en prenant un terme quelconque d'une progreſſion Géométrique aſcendante, on y trouvera toujours le produit du premier terme $p$ par l'expoſant $e$ élevé à une puiſſance moindre d'un degré que le nombre qui indique ſa place: car dans le cinquième terme $pe^4$, l'expoſant $e$ n'eſt élevé qu'à ſa quatrième puiſſance, &c. & comme le dernier de ſes termes en indique toujours le nombre $n$ par la place qu'il occupe, il eſt évident que ce dernier terme =

$p\,e^{n-1}$. L'expreſſion de la ſomme de tous les termes d'une pareille progreſſion eſt donc $= s$, ſon premier terme $= p$, ſon ſecond $= p\,e$, & ſon dernier $= p\,e^{n-1}$.

Que l'on ſe rappelle à préſent la Réſolution du n°. 270, & l'on verra que la ſomme des antécédents de cette progreſſion eſt égale à la ſomme $s$ de tous ſes termes, moins le dernier $p\,e^{n-1}$; la ſomme des antécédents eſt donc $s - p\,e^{n-1}$: on y verra auſſi que la ſomme de ſes conſéquents eſt égale à la ſomme $s$ de tous ſes termes, moins le premier $p$, & qu'ainſi l'expreſſion de la ſomme des conſéquents $= s - p$.

Mais il eſt démontré (n°. 258.) que, dans une ſuite de rapports Géométriques égaux, la ſomme des antécédents eſt à celle des conſéquents, comme un antécédent quelconque eſt à ſon conſéquent; c'eſt-à-dire ici que $s - p\,e^{n-1} . s - p :: p . p\,e$. Donc (en faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens) l'on a $p\,e\,s - p^2\,e^n$ (*a*) $= p\,s - p^2$; donc (en tranſpoſant) $p\,e\,s - p\,s = p^2\,e^n - p^2$; &, diviſant par $p$, l'on a $e\,s - s = p\,e^n - p$, ou $e - 1 \times s = p\,e^n - p$; & enfin, en diviſant par $e - 1$, il vient $s = \frac{p\,e^n - p}{e-1}$ pour la ſomme $s$ de tous les termes de cette progreſſion. Ce qui ſignifie que cette ſomme eſt égale au produit du premier terme $p$ par l'expoſant $e$, élevé à la puiſſance indiquée par le nombre $n$ des

(*a*) On vient de voir qu'en multipliant $-p\,e^{n-1}$ par $p\,e$, l'on a eu $\longrightarrow p^2\,e^n$. Car, ſi l'on multiplioit $x^2$ par $x^3$, on auroit $x^{2+3} = x^5$; ce qui fait voir que, quand les racines qui ſe multiplient ſont les mêmes, on écrit au produit une ſeule fois la racine, & on lui donne pour expoſant la ſomme des expoſans des quantités qui ſe multiplient. Ainſi $-p\,e^{n-1} \times p\,e$ ou $\times p\,e^1 = -p^2\,e^{n-1+1} = -p^2\,e^n$; comme on le voit dans le texte.

termes, pourvû que l'on en ôte le premier terme $p$, & que l'on en diviſe le reſte par l'expoſant $e$ diminué de l'unité.

## PROBLÊME,

*Où l'on va voir l'application de la formule* $s = \frac{p\,e^n - p}{e - 1}$.

Un homme joue contre un autre au *Paſſe-Dix* avec trois dez. Le ſecond a parié d'abord un Louis que le premier ne paſſeroit pas; celui ci a paſſé. Le perdant, dont le projet étoit de ſe retirer du jeu dès qu'il auroit gagné un Louis, en met deux pour le ſecond coup, & il les perd. Il en met donc quatre au troiſième coup, qu'il perd encore; doublant toujours pour le coup ſuivant ce qu'il a perdu dans le précédent, il parvient à perdre tout l'or qu'il portoit: ayant néanmoins continué de parier ſur ſa parole d'honneur, il a perdu 20 coups de ſuite; après quoi celui qui tenoit les dez a refuſé de tenir les paris, voulant ſçavoir ſi toutes ces pertes réunies n'excédoient pas les facultés de ſon adverſaire.

## RÉSOLUTION.

Il a perdu 1 au premier coup; au ſecond 2; au troiſième 4; au quatrième 8, &c. La ſuite des pertes forme donc la progreſſion Géométrique aſcendante $\therefore$ 1 . 2 . 4 . 8, &c. dont il faut trouver la ſomme. Prenez la formule $s = \frac{p\,e^n - p}{e - 1}$. Puiſque le premier terme $p = 1$, l'expoſant $e = 2$, le nombre des termes $n = 20$; en faiſant la ſubſtitution, cette équation deviendra $s = \frac{1 \times 2^{20} - 1}{2 - 1}$

$= \frac{2^{20}-1}{1} = 2^{20} - 1$ ; c'eſt-à dire, que la ſomme des Louis perdus eſt repréſentée par le produit de l'expoſant 2 élevé à la vingtième puiſſance, duquel produit on ôtera 1.

Multipliez donc 2 par 2, vous aurez 4 pour la ſeconde puiſſance de 2. En multipliant 4 par 4, on aura 16 pour ſa quatrième puiſſance ; & $16 \times 2 = 32$ en ſera la cinquième puiſſance ; $32 \times 32 = 1024$ en ſera la dixième ; ainſi, en multipliant 1024 par 1024, le produit 1048576 donnera la vingtième puiſſance de 1. Si l'on ôte 1, on trouvera que la perte totale eſt de 1048575 Louis. Ce qui eſt énorme.

Quand même le perdant n'auroit parié d'abord qu'un liard, il n'auroit pas laiſſé de perdre 13107 livres, 3 ſols, 3 liards ; ce que vous trouverez, en diviſant 1048575 liards par le nombre 80 qui exprime combien il y a de liards dans une livre. Cette dernière perte eſt toujours fort conſidérable pour un homme ordinaire, & démontre avec quelle circonſpection l'on doit s'engager dans ces ſortes de jeux ; puiſqu'un premier pari, auſſi vil que celui d'un liard, conduiroit néanmoins à une perte qui pourroit ruiner les affaires d'un très-grand nombre de particuliers.

## PROBLÊME

### QUI EST L'INVERSE DU PRÉCÉDENT.

Suppoſons préſentement que le perdant de la queſtion précédente prenne ſa revanche & tienne les dez ; que ſon même adverſaire parie deux Louis pour le premier coup, & qu'il double toujours au coup ſuivant ce qu'il aura perdu dans le précédent, comme on a fait ci-deſſus. Combien doit il perdre

de coups de ſuite, pour que ſon antagoniſte ne lui doive plus rien ou preſque rien?

## RÉSOLUTION.

I. Quoique le premier pari ſoit double, dans ce Problème-ci, du premier pari de la queſtion précédente, il faudra que ſon adverſaire gagne dix-neuf coups de ſuite pour s'acquitter à peu près. Il ne perdra plus qu'un Louis.

## DÉMONSTRATION.

Reprenons l'équation $s = \frac{p e^n - p}{e - 1}$. Il s'agit d'en dégager l'inconnue $n$ qui indique le nombre des coups. Multiplions ſes deux membres par $e - 1$, & tranſpoſons enſuite $- p$; nous aurons $es - s + p = p e^n$; diviſant encore par $p$, l'équation deviendra $\frac{es - s + p}{p} = e^n$. Or (ſupp.) $e = 2$, & $p = 2$; donc on aura $\frac{2s - s + 2}{2} = 2^n = \frac{s + 2}{2}$; mais la ſomme $s$ à gagner doit être égale à la ſomme perdue, laquelle eſt de 1048575 Louis; par conſéquent $2^n = \frac{1048577}{2} = 524288\frac{1}{2}$.

Elevez donc le nombre 2 à ſes puiſſances ſucceſſives, juſqu'à ce que vous en trouviez une $= 524288\frac{1}{2}$ ou approchant; & ſon degré vous indiquera le nombre des coups de ſuite que doit gagner celui qui tient les dez. Vous verrez que la dix-neuvième puiſſance de $2 = 524288$, nombre qui eſt très-proche de $524288\frac{1}{2}$. Ainſi le nombre $n$ des coups gagnés de ſuite doit être 19.

On le prouvera, en cherchant la ſomme $s$ d'une progreſſion Géométrique aſcendante, dont le premier terme $p = 2$, l'expoſant $e = 2$, le nombre

des termes $n = 19$ ; &, pour y parvenir, on reprendra la formule $s = \frac{pe^n - p}{e - 1}$, laquelle par la ſubſtitution des nombres deviendra $s = \frac{2 \times 2^{19} - 2}{2 - 1} = \frac{2 \times 524288 - 2}{1} = 1048576 - 2 = 1048574$ Louis. Ce gain ne diffère que d'un Louis de la perte précédente.

II. Si l'on a des Tables de Logarithmes fort étendues, on trouvera ſans tâtonnement le nombre $n$ des coups. Suppoſons que $l$ miſe à la tête d'un nombre, en exprime le Logarithme. Puiſque $2^n = \frac{1048577}{2}$, comme on vient de le voir (Art. I.), le Logarithme de $2^n$ eſt égal au Logarithme de $\frac{1048577}{2}$ ; c'eſt-à dire, $n\, l\, 2$ * $= l\, \frac{1048577}{2}$ ; & par conſéquent $n = \frac{l\, \frac{1048577}{2}}{l\, 2}$. Ce qui ſignifie qu'en diviſant le Logarithme de $\frac{1048577}{2}$ par celui de 2, on aura au quotient le nombre $n$ des coups, que l'on trouvera égal à 19.

* Si on ne concevoit pas d'abord que le Logarithme de $2^n = n\, l\, 2$, il faudroit ſe rappeller ou relire le n°. 264, où l'on a fait voir que le Logarithme d'un quarré ou d'une ſeconde puiſſance eſt toujours double de celui de ſa racine ; que le Logarithme d'un cube ou d'une troiſième puiſſance eſt le triple du Logarithme de ſa racine, &c. C'eſt donc à dire que l'on a le Logarithme d'une puiſſance quelconque, en multipliant le Logarithme de ſa racine par l'expoſant de cette même puiſſance : par conſéquent 2 étant la racine & $n$ l'expoſant de la puiſſance $2^n$, l'expreſſion de ſon Logarithme $= n\, l\, 2$.

On voit par-là qu'il ne faut pas pénétrer fort avant dans les ſecrets des nombres, pour tomber dans les Logarithmes. On y eſt jetté par les queſtions les plus communes, dont on ne ſçauroit ſe démêler autrement que par de longs circuits, ou par des tâtonnemens qui font peu d'honneur au Mathématicien. Ceux qui auroient paſſé légèrement ſur des Logarithmes, & qui ſe deſtineroient néanmoins à une profeſſion ou à

Cependant, comme on ne doit point laiſſer aller ſeules des perſonnes qui ont compté ſur un guide perpétuel, je vais les conduire. Elles ne trouveront point le Logarithme de 1048577 dans les Tables *in*-8°. d'Ozanam, que j'ai ſous les yeux, comme les plus communes; puiſqu'on n'y a les Logarithmes des nombres naturels que juſqu'à 10000. Mais, en faiſant uſage de la méthode qui y eſt enſeignée, on le trouvera de 6. 0206003; & le Logarithme de 2 = 0. 3010300. Or, puiſqu'une fraction revient à une diviſion, dans laquelle le numérateur ſeroit dividende & le dénominateur ſeroit diviſeur, il faut (n°. 264.) ôter le Logarithme du dénominateur de celui du numérateur, pour avoir le Logarithme de cette fraction; par conſéquent celui de $\frac{1048577}{2}$ = 6. 0206003 moins 0. 3010300 = 5. 7195703, que l'on doit diviſer par le Logarithme de 2 = 0. 3010300, pour avoir le nombre des coups *n*. Or 5719570 3 diviſés par 3010300 donnent au quotient 19; le 3 qui reſte après la diviſion, exprime une fraction ſi exceſſivement petite, qu'on la doit compter pour rien.

un état, dont les Mathématiques ſeroient la baſe, doivent y revenir indiſpenſablement, en étudier ſcrupuleuſement la nature, la formation, les uſages, & s'en rendre la pratique très-familière. La queſtion même, qui occaſionne cette note, démontre que les Financiers & les Commerçans ſeroient très-bien de s'y exercer; leurs intérêts forment ſouvent des progreſſions, dont ils apprécieroient les ſommes avec une extrême facilité par le ſecours des Logarithmes.

Les Tables ordinaires de ces nombres ne ſont pas aſſez étendues pour répondre à toutes les queſtions: mais, dans tous les Livres qui en traitent expreſſément & mathématiquement, on trouve un art fort ſimple d'avoir le Logarithme d'un nombre plus grand que ceux des Tables; il eſt donc à propos de s'en fournir, & d'en avoir toujours ſous ſa main.

*De la Progreſſion Arithmétique.*

273. La progreſſion Arithmétique n'eſt qu'une proportion Arithmétique continue, qui a plus de trois termes. Elle eſt *aſcendante* ou *deſcendante*, ſelon que ſes termes vont en croiſſant ou en décroiſſant 2 . 4 : 4 . 6 : 6 . 8 : 8 . 10, &c. eſt une progreſſion Arithmétique aſcendante, que l'on écrit plus ſimplement de cette manière, ∴ 2 . 4 . 6 . 8 . 10, &c. où vous remarquerez que la même différence règne toujours entre deux termes conſécutifs quelconques, & que le ſecond terme vaut la ſomme du premier, & de la différence entre deux termes conſécutifs, que nous appellerons dans la ſuite, *différence de la progreſſion*, en la déſignant par la lettre *d*. Le troiſième terme eſt égal au ſecond, joint à la différence *d*; mais le ſecond = le premier + *d*; donc le troiſième = le premier + 2 *d*: de même le quatrième = le troiſième + *d*: or le troiſième = le premier + 2 *d*; donc le quatrième = le premier + 3 *d*; deſorte que, 1°. *un terme quelconque d'une progreſſion Arithmétique eſt toujours égal au premier terme, joint à la différence de la progreſſion multipliée par le nombre des termes qui le précèdent.*

2°. Le dernier terme d'une progreſſion Arithmétique eſt donc égal au premier, joint à la différence de la progreſſion multipliée par le nombre de tous ſes termes moins 1; puiſque le nombre des termes qui le précèdent, eſt le même que celui de tous les termes de la progreſſion, dont on ôte un terme. Appellant donc *p* le premier terme d'une progreſſion Arithmétique quelconque, *d* ſa différence, *u* ſon dernier terme, *n* le nombre de ſes termes, on aura $u = p + d \times n - 1$.

3°. Par

3°. Par conſéquent le premier terme $p$, le dernier $u$, & le nombre des termes $n$ d'une progreſſion Arithmétique étant donnés, on en trouvera la différence $d$, en ôtant le premier terme du dernier, & diviſant enſuite ce reſte par le nombre des termes moins 1. Car, puiſque (Art. 2.) $u = p + \overline{d \times n - 1}$, on aura $u - p = \overline{d \times n - 1}$; donc $\frac{u-p}{n-1} = d$.

4°. On déterminera auſſi le nombre des termes d'une progreſſion Arithmétique, dont le premier terme $p$, le dernier $u$, & la différence $d$ ſeront donnés, en ôtant le premier du dernier, & diviſant ce reſte par la différence de la progreſſion, puiſqu'il ne s'en faudra que 1, que l'on n'ait alors le nombre des termes. Pour le démontrer, reprenons l'équation $u = p + \overline{d \times n - 1}$, laquelle, en tranſpoſant $p$, donnera $u - p = \overline{d \times n - 1}$; donc $\frac{u-p}{d} = n - 1$ : où l'on voit qu'en ajoutant 1 à $n - 1$, l'on aura le nombre des termes $n$.

5°. Dans une progreſſion Arithmétique quelconque $\div a . b . c . d . e . f . g$, &c. la ſomme $c + e$ de deux termes quelconques $c$, $e$, à égale diſtance des extrêmes $a$, $g$, eſt égale à la ſomme $a + g$ de ces extrêmes; il faut donc démontrer que $c + e = a + g$.

## DÉMONSTRATION.

En développant la progreſſion de cette maniere $a . b ; b , c : c . d : d . e : e . f : f . g$, il eſt viſible que $a . b : f . g$; donc $a + g = b + f$: pareillement que $b . c : e . f$; donc $b + f = c + e$: ainſi $c + e = a + g$.

6°. Ainſi le nombre des termes étant impair,

comme dans la proposée, le double $2d$ du terme du milieu $= a + g$, somme des extrêmes. Car, en jettant un coup d'œil sur la progression développée, (Art. 5.) on voit que $c . d : d . e$; donc $2d = c + e$: or $c + e = a + g$ (Art. 5.); donc $2d = a + g$.

7°. Donc $d = \frac{a+g}{2}$, c'est à-dire, que le terme $d$ du milieu est égal à la moitié de la somme des extrêmes $a + g$.

8°. La somme $s$ de tous les termes d'une progression Arithmétique quelconque est égale à la somme des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes de cette progression.

## DÉMONSTRATION.

Si le nombre des termes est pair, chaque somme des termes, à égale distance des extrêmes, renfermant deux termes, le nombre de ces sommes jointes à celle des extrêmes, ne sera que la moitié du nombre des termes de la progression. Or chacune de ces sommes est égale à celle des extrêmes (Art. 5.); en multipliant donc celle des extrêmes par le nombre de ces sommes, c'est à-dire, par la moitié du nombre des termes, on aura la valeur de toutes ces sommes, ou de toute la progression : ce qui donne l'équation $S = \overline{p + u} \times \frac{n}{2}$.

Si le nombre des termes est impair, il n'y a qu'à supposer d'abord que l'on ôte le terme du milieu : le nombre des termes sera pair, & exprimé par $n - 1$; donc la somme des termes de cette progression, dont on aura ôté un terme, sera $\overline{p + u} \times \frac{n-1}{2}$, à laquelle il ne manquera qu'un terme,

pour être la ſomme de la progreſſion propoſée : or ce terme ôté étant celui du milieu, eſt égal à $\frac{p+u}{2}$, c'eſt-à dire, à la moitié de la ſomme des extrêmes; donc, pour compléter la ſomme des termes de cette progreſſion, il faudra y remettre le terme ôté, qui eſt $\frac{p+u}{2}$; moyennant quoi la ſomme de tous les termes de la progreſſion ſera $S = \overline{p+u} \times \frac{n}{2} + \frac{p+u}{2} = \frac{pn+nu-p-u}{2} + \frac{p+u}{2} = \frac{pn+nu}{2} = \overline{p+u} \times \frac{n}{2}$. Ce qui ſignifie que la ſomme cherchée S eſt égale à la ſomme des extrêmes $p + u$ multipliée par $\frac{n}{2}$, moitié du nombre des termes. La propoſition eſt donc généralement vraie, ſoit que le nombre des termes ſoit pair, ſoit qu'il ſoit impair.

9°. Par conſéquent, *ſi le premier terme d'une progreſſion Arithmétique aſcendente eſt* 0, *la ſomme de tous les termes de la progreſſion ſera égale au dernier terme multiplié par la moitié du nombre des termes*; ce qui eſt tout-à-fait évident, quand même on n'auroit pas l'équation $S = \overline{p+u} \times \frac{n}{2}$, qui le démontre invinciblement; puiſqu'en ôtant le premier terme $p$, que l'on ſuppoſe égal à zéro, elle devient $S = u \times \frac{n}{2}$; c'eſt-à-dire, égal au dernier terme $u$, multiplié par $\frac{n}{2}$, moitié du nombre des termes. Cette vérité eſt eſſentielle pour l'intelligence de mon Traité des *Sections Coniques & autres Courbes anciennes appliquées aux Arts*, que je publiai en 1750.

## PROBLÊME,

*Où l'on fait uſage de la Progreſſion Arithmétique.*

On ſe propoſe de planter une Avenue, dont les deux côtés doivent avoir chacun 300 toiſes, les arbres à 3 toiſes l'un de l'autre. Pour les porter plus commodément à l'endroit de leur deſtination, celui qui en eſt chargé doit les prendre à 3 toiſes du premier que l'on plantera. Comme on ſuppoſe leur peſanteur aſſez conſidérable, il ne pourra en tranſporter qu'un ſeul à la fois. Afin donc que l'on puiſſe évaluer le tems qu'il emploiera à ce tranſport, on demande la longueur du chemin qu'il ſera obligé de faire.

## RÉSOLUTION.

Remarquez d'abord que pour remplir cette condition, il faut que l'ouvrier tranſporte cent & un arbres de chaque côté. Car le premier intervalle 3 toiſes exige deux arbres, un au commencement & l'autre à la fin : ainſi deux intervalles en exigeront trois ; pour trois il en faudra quatre ; & enfin cent intervalles, qui feront les 300 toiſes d'un côté, demanderont cent & un arbres.

Obſervez en ſecond lieu, que chaque arbre, tranſporté ſéparément, exige l'aller & le venir. Il faudra que l'ouvrier faſſe 6 toiſes de chemin pour le premier arbre, 12 pour le ſecond, 18 pour le troiſième, 24 pour le quatrième, &c. & 606 toiſes pour le cent-unième & dernier. Or 6, 12, 18, 24, &c. forment une progreſſion Arithmétique ; puiſqu'il y a toujours la même différence 6 entre chaque terme conſécutif. Le premier terme de cette Progreſſion étant 6, le dernier 606, &

le nombre des termes 101, on en aura la ſomme S (Art. 8. du n°. 273.) en multipliant 612, qui eſt celle des extrêmes 6 & 606, par $\frac{101}{2}$ moitié de 101, nombre des termes de cette progreſſion; c'eſt-à-dire, que $S = 612 \times \frac{101}{2} = 306 \times 101 = 30906$ toiſes.

L'ouvrier deſtiné au tranſport de ces arbres, ſera donc obligé de faire, pour chaque côté de l'Avenue, un chemin de 30906 toiſes, & par conſéquent 61812 toiſes pour les deux côtés.

Si l'on évalue la lieue Françoiſe à 2850 toiſes, on verra que ce chemin eſt de 21 lieues, & un peu plus de deux tiers.

Je ſuppoſe ici vingt lieues au degré terreſtre, & 57000 toiſes pour un degré moyen de la terre: car il paroît que les degrés des différentes latitudes ne ſont pas tous préciſément de la même longueur (*a*).

(*a*) *Ne ſont pas tous préciſément de la même longueur.* L'Académie des Sciences s'eſt fort occupée de ces recherches depuis trente ans. Elles pouvoient contribuer à la perfection de la Géographie & de la Navigation. Si la Terre eſt parfaitement ronde ou ſphérique en tous ſens, les degrés de ſa circonférence doivent être tous de la même longueur. Mais une autre courbure doit y apporter des inégalités. En prenant en toiſes la longueur de quelques degrés dans la ſeule étendue de la France, leurs différences pouvoient n'être pas aſſez ſenſibles, mais le devenir à des diſtances fort éloignées.

Cette raiſon détermina le Roi à envoyer, en 1735, Mrs. Godin, Bouguer, & la Condamine au Pérou, vers les environs de l'équateur; & en 1737, Mrs. Maupertuis, Clairaut, le Camus & le Monnier, dans la Laponie Suédoiſe, aux environs du cercle polaire. Ceux-ci trouverent qu'un degré terreſtre contenoit 57422 toiſes; on ne l'eut au Pérou que de 56753, tandis qu'on l'avoit en France de 57074 toiſes: par où l'on voit que les degrés terreſtres croiſſent en longueur, en allant de l'équateur au pôle. Cependant ces différences ne paroiſſent pas aſſez conſidérables pour rien changer à la conſtruction des Cartes.

# CHAPITRE II.

## *Des Lignes Proportionnelles.*

LES proportions des nombres, dont nous avons établi les propriétés dans le Chapitre précédent, ſerviront de baſe aux proportions des lignes qui vont être l'objet de ce Chapitre. Une proportion *linéaire* une fois donnée, ſes termes ſeront ſuſceptibles des mêmes variations que ceux d'une proportion numérique. Ce qui nous importe donc ici particuliérement, eſt d'arriver à une proportion linéaire, & de déterminer dans quelles circonſtances les lignes deviennent proportionnelles : car après cela on pourra leur faire ſubir toutes les transformations qui leur conviennent, ſuivant le beſoin que l'on en aura ; mais nous avons promis de déduire immédiatement les unes des autres toutes les Propoſitions des trois premiers Livres de notre Géométrie ; il eſt donc néceſſaire que la dernière Propoſition du ſecond Livre, qui eſt la dix ſeptième dans l'ordre des Propoſitions, ſoit le principe, ou tout au moins ſoit un des principes qui concourent à établir la première Propoſition du troiſième Livre, c'eſt-à-dire, la dix-huitième Propoſition.

### PROPOSITION XVIII.

274. Les ſurfaces des Triangles quelconques C A B, *c a b* (*fig.* 66.) ſont entre elles, comme les produits de leur baſe par leur hauteur.

Soit la ſurface du Triangle C A B = S, ſa baſe A B = B, ſa hauteur C H = H ; & la ſurface du

Triangle $cab = s$, ſa baſe $ab = b$, & ſa hauteur $ch = h$. Il faut démontrer que S . $s$:: BH . $bh$.

## DÉMONSTRATION.

Rappellez-vous la Propoſition 17, (n° 172.) où il a été démontré que les Triangles de même baſe & de même hauteur ſont égaux en ſurface; ainſi la ſurface du Triangle ABC, dont CH eſt la hauteur & AB la baſe, eſt égale à la ſurface d'un triangle rectangle, qui auroit AB pour baſe & CH pour hauteur. Or on détermine la ſurface d'un Triangle rectangle, en prenant la moitié du produit de ſa baſe par ſa hauteur (n°. 168.); par conſéquent $S = \frac{BH}{2}$; & par la même raiſon $s = \frac{bh}{2}$; donc S . $s$ :: $\frac{BH}{2} \cdot \frac{bh}{2}$ :: BH . $bh$: car les moitiés ſont entre elles comme les touts dont elles ſont moitiés. Ainſi S, $s$ :: BH . $bh$; C. Q. F. D.

Cette Propoſition n'a point de converſe, parce qu'elle n'eſt pas compoſée de deux parties, dont l'une ſoit la conſéquence de l'autre. (n°. 177. Note *a*.)

Comme les Parallélogrammes ſont doubles des Triangles, il eſt clair que les Parallélogrammes ſont auſſi comme les produits de leur baſe par leur hauteur.

## PROBLÊME.

275. Déterminer le rapport de deux Triangles, dont l'un a 8 pieds de baſe ſur 5 de hauteur, & l'autre 12 de baſe ſur 6 de hauteur.

## RÉSOLUTION.

Appellons $s$ la ſurface du premier Triangle, & S celle du ſecond.

Par la Propoſition précédente $s$ . S :: $8 \times 5$ . $12$

$\times 6 :: 8 \times 5 . 9 \times 8 :: 5 . 9$, en divisant par 8 les deux termes du dernier rapport, ce qui ne détruit pas la proportion (n°. 252.); donc $s . S :: 5 . 9$; c'est à-dire, que le premier triangle $s$ ne contient que les $\frac{5}{9}$ du second triangle S.

La surface d'un triangle est donc connue dès que l'on sait son rapport à celle d'un autre triangle dont on a la mesure.

## PROPOSITION XIX.

276. Les triangles de même hauteur sont entre eux comme leur base ; & les triangles de même base sont entre eux comme leur hauteur.

Remarquez que par triangles on entend ici l'aire ou la surface de ces triangles.

## DÉMONSTRATION.

Supposant les mêmes dénominations que nous avons données (n° 274.) il s'agit de prouver que $S . s :: B . b$, si $H = h$, ou que $S . s :: H . h$, si $B = b$. Or (par la Proposition 18.) $S . s :: BH . bh$; donc, 1°. en divisant les deux derniers termes par $H = h$ (supp.), $S . s :: B . b$; ou, 2°. en divisant par $B = b$, $S . s :: H . h$; C. Q. F. D.

La converse de cette Proposition est vraie, c'est-à-dire, que les triangles, qui sont entre eux comme leur base, ont nécessairement même hauteur ; & ceux qui sont entre eux comme leur hauteur, ont nécessairement même base.

Il faut donc prouver que l'on aura $H = h$, si $S . s :: B . b$, ou que $B = b$, si $S . s :: H . h$.

## DÉMONSTRATION.

1°. (Supp.) $S . s :: B , b$ : d'un autre côté

(n°. 274.) S. $s$ :: BH. $bh$; mais deux rapports, égaux à un troisième rapport, sont égaux entre eux; donc B. $b$ :: BH. $bh$ : ainsi B $bh$ = B $b$ H; & divisant l'un & l'autre membre par B $b$, on a $h$ = H; C. Q. F. 1°. D.

2°. Puisque (supp.) S. $s$ :: H. $h$, & que (n°. 274.) S. $s$ :: BH. $bh$; donc H. $h$ :: BH. $bh$ : ainsi $b$ H $h$ = BH $h$; & par conséquent en divisant l'un & l'autre membre par H $h$, on a B = $b$; C. Q. F. 2°. D.

Les Parallélogrammes étant doubles des triangles, il faut leur attribuer les mêmes propriétés que nous venons de découvrir.

## PROBLÊME.

277. Trouver le rapport d'un triangle, dont la base = 7 toises, & la hauteur en vaut 4, à un autre triangle, dont la base = aussi 7 toises & la hauteur 20.

## RÉSOLUTION.

Dites : puisque ces triangles ont même base, ils sont entr'eux comme leurs hauteurs (par la Proposition précédente) : ainsi $s$. S :: 4. 20 :: 1. 5; donc $s$. S :: 1. 5, c'est-à dire, que la surface de l'un n'est que la cinquième partie de la surface de l'autre.

## PROPOSITION XX.

278. Deux triangles égaux en surface, & qui ont même base, ont nécessairement même hauteur, ou sont posés entre les mêmes paralleles.

On suppose donc que S = $s$, & B = $b$; d'où il faut conclure que H = $h$.

## DÉMONSTRATION.

Par la Proposition précédente, les triangles de même base sont entr'eux comme leurs hauteurs; donc S . *s* :: H . *h*; mais (supp.) S = *s* : ainsi H = *h*; C. Q. F. D.

Réciproquement deux triangles égaux, qui ont même hauteur, ont nécessairement même base; c'est-à-dire, que si S = *s*, & H = *h*, on aura B = *b*.

## DÉMONSTRATION.

Les triangles de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases (n°. 276.); donc S . *s* :: B . *b*; mais (par la supp.) S = *s*; par conséquent B = *b*; C. Q. F. D.

## PROPOSITION XXI.

279. Une ligne B D qui coupe deux côtés A C, A F d'un triangle A C F, parallèlement à son troisieme côté C F (*fig.* 67.), coupe ces deux côtés en proportion; c'est à dire, que A B. B C :: A D. D F.

Avant de procéder à la Démonstration, tirez les lignes C D, B F, & remarquez que le triangle C B D est égal au triangle F D B: car, en prenant B D pour base de ces triangles, on voit qu'ils sont posés entre les mêmes paralleles, BD, CF (supp.): ces triangles sont donc égaux (n°. 172.); cela posé.

## DÉMONSTRATION.

Comparez le triangle A B D avec le triangle C B D; vous voyez qu'ils se terminent au même

point D : ainſi les conſidérant l'un & l'autre appuyés ſur la ligne AC, comme ils le ſont en effet, il eſt clair que ces deux Triangles ont même hauteur ; mais (n°. 276.) les Triangles de même hauteur ſont entr'eux comme leur baſe ; par conſéquent on a cette première Proportion (*a*) *T*ABD. *T*CBD :: AB. BC. (parce que la hauteur de ces Triangles ſe prenant du point D, ce ſont les côtés AB, BC oppoſés, qui en ſont les baſes.)

Comparez encore le même Triangle ABD avec le triangle FDB ; en les regardant comme appuyés ſur la ligne AF, leur ſommet ſe réunit au même point B : ils ont même hauteur, & par conſéquent ces Triangles ſont entr'eux comme leurs baſes DA, DF ; ce qui donne cette autre proportion,

*T*ABD. *T*FDB :: AD . DF ;

& rapprochant la première proportion,

*T*ABD . *T*CBD :: AB . BC,

on a deux proportions, dont le premier rapport de la première, eſt égal au premier rapport de la ſeconde, puiſque ce ſont des grandeurs égales qui compoſent ces rapports de part & d'autre. Par conſéquent les ſeconds rapports ſont auſſi égaux, c'eſt-à-dire, que AB. BC :: AD. DF ; C. Q. F. D.

Comme cette Propoſition eſt fondamentale, nous allons la réſumer en peu de mots. Parce que les Triangles ABD, BCD, ont même hauteur, ils ſont entr'eux comme leurs baſes AB, BC ; par conſéquent *T*ABD . *T*CBD :: AB. BC ; & par la même raiſon, *T*ABD . *T*FDB :: AD. DF.

Ainſi de la premiere proportion l'on tire $\frac{T\text{ABD}}{T\text{CBD}}$

(*a*) La Lettre *T* ſignifie le Triangle ; ainſi *T*ABD veut dire le Triangle ABD.

$= \frac{AB}{BC}$; & de la seconde il vient $\frac{TABD}{TFDB} = \frac{AD}{DF}$. Et, comme le Triangle CBD a été démontré égal au Triangle FDB, il s'ensuit que $\frac{TABD}{TCBD} = \frac{TABD}{TFDB}$; & par conséquent $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DF}$, ou autrement, AB. BC :: AD. DF.

La converse de cette Proposition est vraie c'est-à-dire, que si deux côtes AC, AF du triangle ACF sont coupés en parties proportionnelles par la ligne BD, cette ligne sera nécessairement parallele au troisieme côté CF.

Tirez, comme ci-dessus, les lignes CD, BF; on aura démontré que BD est parallele à CF, si l'on fait voir que les Triangles CBD, FDB de même base BD, sont égaux en surface : car alors (par la Prop. 20.) des Triangles égaux en surface, qui ont d'ailleurs même base, ont nécessairement même hauteur; ou, ce qui est la même chose, sont nécessairement posés entre mêmes paralleles. Il s'agit donc de démontrer, qu'en supposant la proportion AB. BC :: AD. DF, ou l'équation $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DF}$, on aura nécessairement le Triangle CDB = au Triangle FDB. (*fig.* 67.)

## DÉMONSTRATION.

Le Triangle CBD a même hauteur que le Triangle ABD; ces deux Triangles sont donc entr'eux comme leurs bases AB, BC (n°. 276); & par conséquent on a cette proportion, TABD. TCBD :: AB. BC. Par la même raison, en

comparant le triangle ABD avec le triangle FDB, on trouve que $TABD.TFDB::AD.DF$. De la première proportion on tire l'équation suivante $\frac{TABD}{TCBD} = \frac{AB}{BC}$; & la seconde proportion donne $\frac{TABD}{TFDB} = \frac{AD}{DF}$: mais (par la supposition) $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DF}$; donc $\frac{TABD}{TCBD} = \frac{TABD}{TFDB}$, ou $TABD.TCBD :: TABD.TFDB$; & en alternant, $TABD.TABD :: TCDB.TFDB$: or $TABD = TABD$; par conséquent $TCBD = TFDB$; c'est-à-dire, que le triangle CBD est égal au triangle FDB : de plus ces triangles ont la même base BD; donc (Prop. 20.) ils ont même hauteur, ou, ce qui est le même, ils sont posés entre mêmes paralleles; donc enfin BD est parallele à CF; C. Q. F. D.

Toute la théorie des lignes proportionnelles est fondée sur cette proposition & sur sa converse : ce qui va suivre, n'en sera, pour ainsi dire, que le développement; c'est pourquoi il faut s'attacher à la bien comprendre : si une fois on l'a bien conçue, toutes les Propositions qui en tirent leur Démonstration, & qui ne sont pas en petit nombre, seront entendues presqu'en même tems qu'elles seront lûes.

*COROLLAIRE I.*

280. Puisque nous avons la proportion AB.BC :: AD.DF, nous pouvons lui appliquer les propriétés que nous avons démontrées touchant les proportions en général.

Ainſi, 1°. en alternant, AB. AD :: BC. DF. 2°. (n°. 351.) AB + BC. BC :: AD + DF. DF, ou AC. BC :: AF. DF; & en alternant, on aura AC. AF :: BC. DF.

On pourra encore déduire cette autre Proportion, AB + BC. AB :: AD + DF. AD, ou bien AC. AB :: AF. AD, & en alternant, (n°. 250.) AC. AF :: AB. AD; c'eſt-à-dire en général, que les deux côtés d'un triangle, coupés par une ligne parallele au troiſième côté, ſont entr'eux comme leurs parties correſpondantes.

## *COROLLAIRE II.*

281. Ne tirons que la diagonale DC, (*fig.* 68.) & ſuppoſons que l'angle ADC ſoit coupé en deux parties égales par la parallele BD, (ce qui eſt toujours poſſible : car après avoir coupé l'angle ADC en deux parties égales $x$, $y$, par la ligne BD, on tirera par le point C une parallele CF à la ligne BD, & prolongeant le côté AD juſqu'à la rencontre de la parallele CF, on aura une figure ſemblable à celle de la Propoſition 21.) dans ce cas, $x = s$, (à cauſe du paralléliſme des lignes BD, CF; & $y = t$ ſon angle alterne : mais (ſupp.) $x = y$; donc $s = t$ : ainſi le triangle DCF eſt iſoſcèle (n°. 80.); donc DC = DF; par conſéquent dans la Proportion AB. BC :: AD. DF, en mettant DC en la place de DF, elle deviendra AB. BC :: AD. DC, ou AD. DC :: AB. BC, ou AD. AB :: DC. BC.

C'eſt à-dire, que ſi l'on coupe un angle quelconque ADC d'un triangle en deux parties égales, la baſe AC de cet angle ſera coupée en deux ſegmens AB, BC, proportionnels aux deux côtés AD, DC, qui forment cet angle.

Réciproquement, ſi la baſe AC de l'angle

ADC eſt coupée en deux ſegmens, AB, BC, proportionnels aux côtés AD, DC de l'angle ADC, ou, ſi l'on a la proportion AB. BC :: AD. DC, en tirant une ligne de D en B, elle coupera néceſſairement l'angle ADC en deux parties égales $x, y$.

## DÉMONSTRATION.

Que l'on prolonge AD, juſqu'à ce qu'elle rencontre CF, menée parallelement à DB par le point C, & l'on aura (279.) AB. BC :: AD. DF: or (ſupp.) AB. BC :: AD. DC; donc AD. DF :: AD. DC; donc DF = DC; donc l'angle $t = s$: mais $y = t$ (ſon alterne) $= s$, (comme on vient de le voir) $= x$ (à cauſe de DB parallele à CF); ainſi $y = x$; C. Q. F. D.

On doit faire attention à ce Corollaire; nous en ferons uſage.

## *COROLLAIRE III.*

282. En comparant le triangle ABD avec le triangle BDC, (*fig.* 68.) ſi le côté AD eſt plus petit que le côté DC, l'angle $g$ ſera plus petit que l'angle A; parceque, dans un triangle quelconque ADC, un plus petit côté eſt oppoſé à un plus petit angle (n°. 82). Cependant l'angle $x$ d'une part = l'angle $y$ d'une autre part, & les côtés AD, AB, autour de l'angle A, ſont proportionnels aux côtés DC, BC de l'angle $g <$ A. Deux triangles ABD, BCD, peuvent donc avoir un angle égal, & des côtés autour d'un autre angle proportionnels, ſans être pour cela des triangles équiangles (*a*).

(*a*) Les triangles équiangles ſont ceux dont tous les angles ſont égaux, chacun à chacun.

## PROPOSITION XXII.

283. Les triangles équiangles ABC, *obs*, ont leurs côtés proportionnels. (*fig.* 69.)

On ſuppoſe donc que l'angle B = l'angle *b*, que A = *o*, & que C = *s*. De cette ſuppoſition il en faut conclure, que deux côtés d'une part forment une proportion avec deux autres côtés de l'autre part, pourvu qu'ils ſoient oppoſés aux mêmes angles que les deux premiers côtés; c'eſt-à dire, que l'on aura BA. *bo* :: BC. *bs* :: AC. *os*.

## DÉMONSTRATION.

On ſuppoſe que les côtés du triangle ABC ſont plus grands que les côtés du triangle *obs*: on pourra donc prendre ſur le côté BA une partie BO égale au côté *bo* du petit triangle *obs*; & ſur l'autre côté BC une partie BS égale au côté *bs* du même triangle *obs*; après cela, joignant les points O, S par la ligne OS, il eſt clair (à cauſe de l'angle *b* = B) que le triangle BOS, pris ſur le grand triangle BAC, a tous ſes côtés & tous ſes angles égaux à ceux du triangle ſéparé *bos*. L'angle BOS eſt donc égal à l'angle BAC; ainſi les deux lignes OS, AC ſont également inclinées ſur la même ligne AB; & OS eſt parallèle à AC: or (Prop. XXI. n°. 279.) une ligne qui coupe deux côtés d'un triangle parallèlement à ſon troiſième côté, coupe ces côtés en parties proportionnelles. Donc BO. OA :: BS. SC; ainſi BO + OA. BO :: BS + SC. BS; c'eſt-à-dire, BA. BO :: BC. BS; C. Q. F. 1°. D.

On démontrera de même que BC. *bs* : AC. *os*: car prenant, comme ci-deſſus, ſur le grand triangle BAC le petit triangle *b*C*o*, égal au triangle

triangle séparé *b s o*, (*fig.* 70.) (ce qui est possible, puisque l'on suppose l'angle C d'une part, égal à l'angle *s* de l'autre part) on verra que le petit triangle *b* C *o* a tous ses angles égaux, chacun à chacun, à tous les angles du triangle BCA; ainsi l'angle C *b o* = l'angle CBA; & par conséquent les lignes *b o*, BA sont également inclinées sur la même ligne BC; donc *b o* est parallèle à BA, & l'on a (n°. 279. & 280.) BC. *b* C, ou *b s* :: CA. C *o* ou *s o*; C. Q. F. 2°. D.

Réciproquement, si les côtés du triangle BAC (*fig.* 69.) sont proportionnels aux côtés du triangle *b o s*, ces triangles sont nécessairement équiangles; c'est-à-dire, que les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun : on suppose donc que BA. *b o* :: BC. *b s* :: CA. *s o*; & il en faut conclure, que les angles du triangle BAC sont égaux aux angles du triangle *b o s*, chacun à chacun.

## DÉMONSTRATION.

Prenez sur le grand côté BA la partie BO = le côté *b o*, & sur l'autre côté BC, la partie BS = le côté *b s* du petit triangle *b o s*: tirez enfin la ligne OS, & considérez que les côtés BA, BC du triangle BAC, étant coupés proportionnellement par la ligne OS, à cause que l'on suppose la proportion BA. BO :: BC. BS, il s'ensuit (par la conv. de la Prop. 21. n°. 269.) que la ligne OS est parallèle à la ligne AC, & par conséquent le triangle BOS est équiangle au triangle BAC; mais si l'on démontre que le triangle BOS est égal en tout au triangle *b o s*, on aura démontré que le petit triangle *b o s* est aussi équiangle au grand triangle BAC: or l'on sçait déja que les deux côtés BO, BS du triangle BOS, sont égaux aux deux côtés *b o*, *b s* du

triangle *b o s ;* reſte donc à démontrer que le troiſième côté O S de l'un eſt égal au troiſieme côté *o s* de l'autre.

Les deux triangles B A C, B O S étant équiangles, on a B C. B S :: C A. S O ; mais (par la ſupp.) B C. *b s* :: C A. *s o ;* donc C A. S O :: C A. *s o*, ou C A. C A :: S O. *s o :* or C A = C A ; par conſéquent le côté S O du triangle B O S eſt égal au côté *so* de l'autre triangle *b o s :* le triangle B O S eſt donc égal en tout au triangle *b o s ;* par conſéquent, comme le triangle B O S eſt équiangle au triangle B A C, il s'enſuit que le petit triangle *b o s* eſt auſſi équiangle au grand triangle B A C ; donc les triangles qui ont leurs côtés proportionnels, ſont des triangles équiangles ; C. Q. F. D.

Cette Propoſition eſt célebre dans la Géométrie ; nous allons la retrouver par-tout à meſure que nous avancerons : on doit ſe la rendre très familiere, afin de n'être point arrêté par la ſuite des concluſions que l'on en déduit avec une extrême facilité ; concluſions ſur leſquelles va rouler dorénavant le reſte de notre Géométrie, qui n'en ſera, pour ainſi dire, qu'un Corollaire continué.

On appelle *Triangles ſemblables* (*a*) les triangles équiangles ; c'eſt pourquoi les triangles ſemblables ont leurs côtés proportionnels.

## *COROLLAIRE I.*

284. Si l'angle B d'un triangle A B C eſt égal

(*a*) On obſervera que les triangles ſont les ſeules figures qui ſoient ſemblables, dès qu'on les ſuppoſe équiangles. Les figures qui ont plus de trois côtés, peuvent être équiangles ſans être ſemblables ; parce que, outre l'égalité des angles, il eſt encore néceſſaire que les côtés de ces figures ſoient proportionnels, afin que l'on puiſſe aſſurer qu'elles ſont ſemblables : or les figures qui ont plus de trois côtés, peuvent être équiangles, ſans avoir leurs côtés proportionnels ; & réciproquement elles peuvent avoir leurs côtés proportionnels, ſans être équiangles, comme on le verra plus bas.

à l'angle *b* d'un autre triangle *b o s*, & que de plus les côtés B A, BC, qui ſont autour du premier angle, ſoient proportionnels aux côtés *b o*, *b s*, qui ſont autour du ſecond angle, il eſt certain que ces deux triangles ſont ſemblables; ou, ce qui eſt la même choſe, que ces deux triangles ſont équiangles. (*fig.* 69.)

## DÉMONSTRATION.

Puiſque l'angle B eſt égal à l'angle *b*, on pourra tranſporter l'angle *o b s* ſur l'angle A B C, pour avoir le triangle B O S égal en tout au triangle *b o s*, en prenant la partie BO égale au côté *b o*, & la partie B S égale au côté *b s*. Cela fait, on aura (par la ſuppoſition) B A . BO ou *b o* : : BC . B S ou *b s*; donc (par la conv. de la Prop. 21. n°. 269., la ligne O S eſt parallèle au côté A C. Ainſi le triangle B O S ou *b o s* eſt équiangle au triangle B A C; & par conſéquent deux triangles ſont ſemblables, quand ils ont leurs côtés proportionnels autour d'un même angle; C. Q. F. D.

## *COROLLAIRE II.*

285. Deux triangles ſont ſemblables, quand deux angles de l'un ſont égaux à deux angles de l'autre, chacun à chacun.

Car deux triangles qui ont deux angles égaux chacun à chacun, ont le troiſieme angle d'une part égal au troiſieme angle de l'autre part, & par conſéquent ces triangles ſont équiangles; donc ces triangles ſont ſemblables (n°. 283.); C. Q. F. D.

## *COROLLAIRE III.*

286. Si les deux triangles D B C, *d b o*, (*fig.* 71.) qui ont les angles C, *o* égaux, & les côtés autour

des angles B, *b*, proportionnels, ont encore les angles D, *d*, de même eſpece, c'eſt-à dire, tous deux obtus ou tous deux aigus ; il faut néceſſairement conclure que les angles B, *b*, compris entre les côtés proportionnels, ſont égaux ; & par conſéquent que ces deux triangles ſont ſemblables.

## DÉMONSTRATION.

Si l'on veut que l'un de ces deux angles ſoit plus grand que l'autre, par exemple, que B ſoit plus grand que *b*, retranchons de l'angle B l'angle SBC $= b$ ; alors les deux triangles SBC, *dbo* ſeront équiangles, puiſque C $= c$, & que l'angle SBC $= dbc$ ; donc le troiſieme angle BSC ſera égal au troiſieme angle *d*, & par conſéquent les deux angles BSC & D ſeront de même eſpèce ; & de plus, comme les triangles SBC, *dbo* ſont équiangles, on aura BC. BS :: *bo*. *bd* ; mais (par la ſuppoſition) *bo*. *bd* :: BC. BD ; donc BC. BS :: BC. BD, & en alternant, BC. BC :: BS. BD : or BC $=$ BC ; donc BS $=$ BD, & le triangle DSB eſt iſoſcèle ; donc les angles oppoſés aux côtés égaux, ſont égaux : ainſi l'angle DSB eſt égal à l'angle D, que nous avons déja démontré être de même eſpece que l'angle BSC ; par conſéquent les trois angles D, DSB, BSC ſeroient de même eſpèce, ce qui eſt impoſſible : car il eſt évident que ces trois angles ne ſauroient être en même tems, ou tous trois aigus, ou tous trois obtus, ou enfin tous trois des angles droits ; par conſéquent il eſt auſſi impoſſible que les triangles DBC, *dbo* ne ſoient pas des triangles ſemblables ; C. Q. F. D.

## PROPOSITION XXIII.

287. Si d'un même point A (*fig.* 72.) pris au dehors ou au dedans d'un cercle, on tire deux lignes

AB, AF, dont chacune prolongée, s'il le faut, rencontre la circonférence en deux points, je dis, 1°. ſi le point A eſt au-dedans du cercle, que les parties de l'une ſont réciproquement proportionnelles aux parties de l'autre; & que, 2°. ſi le point A eſt pris hors du cercle, les lignes entières ſont réciproquement proportionnelles aux parties qui ſont hors du cercle.

C'eſt la même démonſtration pour les deux cas; mais, pour éviter la confuſion, on appliquera la Démonſtration a l'une des deux figures, & enſuite à l'autre. Il s'agit donc de démontrer que AB. AF::AC.AD.

## DÉMONSTRATION

Tirez les lignes BC, DF, & remarquez que le triangle CAB eſt équiangle au triangle DAF: car 1°. l'angle A = l'angle A, commun à l'un & l'autre triangle, ou bien oppoſé par le ſommet, (n°. 45.) ſelon que l'on prendra l'une ou l'autre figure. 2°. L'angle F = l'angle B, puiſque ces deux angles ayant leur ſommet à la circonférence du cercle, ont pour meſure la moitié du même arc CD, qui paſſe entre leurs côtés (n°. 104.); donc le troiſième angle ADF eſt égal au troiſième angle ACB (n°. 78.); par conſéquent les deux triangles CAB, DAF ſont équiangles; donc ces triangles ont leurs côtés proportionnels, (Propoſition XXII. n°. 283.) c'eſt-à-dire, que les côtés oppoſés à des angles égaux de part & d'autre, forment une proportion; par conſéquent AB. AF::AC.AD; C.Q.F.D.

### *REMARQUE.*

Pour reconnoître facilement l'arrangement des côtés qui forment une proportion, à meſure que

l'on reconnoît l'égalité des angles dans les triangles que l'on compare, il faut marquer les angles égaux de part & d'autre par des ſignes ſemblables: ainſi nous avons marqué les angles égaux F, B par un point mis au-dedans de ces angles vers leur ſommet; de même les angles égaux A C B, A D F ont été déſignés par un même petit arc décrit de leur ſommet. Quand on a pris cette précaution, il eſt très facile d'arranger, comme il faut, les termes de la proportion: car ſi vous la commencez par le côté A B du triangle C A B, obſervez à quel angle ce côté eſt oppoſé: c'eſt à l'angle A C B; cherchez donc dans l'autre triangle D A F, l'angle A D F égal à l'angle A C B; & le côté A F oppoſé à l'angle A D F, fera le ſecond terme de la proportion: revenant enſuite au premier triangle C A B, on en prendra le côté A C, oppoſé à l'angle B, pour être le troiſième terme de la proportion, & par conſéquent le côté A D du triangle D A F fera le quatrième, puiſque ce côté eſt oppoſé à l'angle F = B. En tenant toujours cette conduite, on ne ſe trompera jamais dans l'arrangement des côtés des triangles équiangles qui forment une proportion.

La converſe de cette propoſition eſt vraie, c'eſt-à-dire, ſi deux lignes qui ſe croiſent au point A, ſont telles que les parties de l'une A B, A D (*fig.* 73.) ſoient réciproquement proportionnelles aux parties A C, A F de l'autre: je dis que les extrémités C, D, F, B de ces lignes, ſont néceſſairement dans la circonférence d'un même cercle; enſorte qu'en faiſant paſſer une circonférence de cercle par trois de ces points pris à volonté, elle paſſera néceſſairement par le quatrieme point.

On ſuppoſe donc que A C. A D :: A B. A F; d'où l'on ſe propoſe de conclure, que la circonférence

qui passeroit par les trois points C, B, D, passeroit aussi nécessairement par le quatrième point F.

## DÉMONSTRATION.

Si la circonférence que l'on feroit passer par les trois points C, B, D, ne passoit pas par le quatrième point F, elle passeroit ou au-delà ou en deçà du point F par rapport au point A; mais nous allons faire voir qu'il est impossible qu'une pareille circonférence passe en-deçà ou au-delà du point F; ce sera donc une nécessité qu'elle passe par le point F. Supposons pour un moment qu'elle passe par le point G en-deçà de F; suivant ce que l'on vient de démontrer, on auroit AC. AD :: AB. AG : mais (par la supposition) l'on a AC. AD :: AB. AF; & par conséquent AG égaleroit AF, puisque ces deux lignes seroient une quatrième proportionnelle aux trois mêmes grandeurs AC, AD, AB : or il est impossible que AG soit égale à AF, une partie ne pouvant pas être égale à son tout; donc aussi il est impossible que la circonférence supposée passe en-deçà de F. On prouvera précisément de la même manière, que cette circonférence ne passera pas en un point quelconque G au-delà de F. Elle passera donc nécessairement par le point F; C. Q. F. D.

## *COROLLAIRE I.*

288. Si du même point pris hors d'un cercle, on tire une sécante AF & une tangente AD, (*fig.* 74.) cette tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante entière AF & sa partie AC hors du cercle. Il s'agit donc de prouver que AF. AD :: AD AC.

## DÉMONSTRATION.

Supposons d'abord que ADB soit une sécante :

on a (par la Prop. XXIII.) AF. AB :: AD. AC. Repréſentons nous maintenant que la ſécante ADB tende à devenir la tangente AD; plus elle approchera d'être la tangente AD, plus les points D, B d'interſection ſeront proches l'un de l'autre, & ils ſe confondront totalement à l'inſtant que ADB deviendra la tangente AD : alors la ſécante entière AB ne ſera pas différente de ſa partie AD hors du cercle ; par conſéquent, dans la proportion AF. AB :: AD. AC, mettant AD au lieu de AB = AD, la proportion deviendra AF. AD :: AD. AC, c'eſt-à-dire, que la tangente AD eſt moyenne proportionnelle entre la ſécante entière & ſa partie hors du cercle ; C. Q. F. D.

## *COROLLAIRE II.*

On peut tirer de-là une nouvelle Démonſtration aſſez ſimple, que le quarré de l'hypothénuſe dans un triangle ABC, rectangle en A (*Fig. M. PL.* 7.) eſt égal à la ſomme des quarrés faits ſur les deux autres côtés AC, AB.

Car du point C, avec l'un des côtés AC, qui forment l'angle droit, décrivant une circonférence, & prolongeant l'hypothénuſe BC juſqu'à ſa rencontre D avec cette circonférence, ſi l'on fait BC = $h$, AB = $t$, AC = CD = OC = $r$, on aura BD = BC + CD = $h + r$, & BO = BC — OC = $h - r$; donc, puiſque BD. AB :: AB. BO (288.) c'eſt-à-dire, $h + r$. $t :: t . h - r$, on trouvera $\overline{h + r} \times \overline{h - r}$, ou $hh - rr = tt$ : ainſi (en tranſpoſant $-rr$) $hh = tt + rr$; C. Q. F. D.

Il arrive très-ſouvent dans la pratique des Arts, que l'on eſt obligé de faire rouler des cylindres, des eſſieux ou des axes les uns ſur les autres ; il faut

alors éviter le frottement le plus qu'il eſt poſſible : or en faiſant tourner un eſſieu cylindrique entre trois cylindres, dont l'un en creux le retiendra ſur les deux autres qui lui ſerviront d'appui, on aura très-peu de frottement, puiſqu'il n'aura lieu qu'en trois points, ainſi que le montre *la Fig. L. de la PL.* 7.

Mais quel doit être le diametre du cercle H, pour être logé entre les trois cercles ATN, ARC, CGN, de maniere qu'il les touche tous trois en même tems ? Le Corollaire que nous venons de démontrer, va nous ſervir à la réſolution de ce Problême.

Mais pour une plus parfaite intelligence de cette queſtion, il eſt à propos de faire voir ; 1°. que deux ou pluſieurs cercles, dont les diametres commencent en un même point C ou G, ſur une même ligne AG (*Fig. T. PL.* 8.), ne ſe touchent qu'en un point unique ; ſoit que leurs convexités ſe rencontrent, comme il arrive aux cercles ASC, CSG ; ſoit que la convexité de l'un rencontre la concavité de l'autre ; tels que ſont les cercles CSG, LGH.

## DÉMONSTRATION.

Si les deux cercles ASC, CSG ſe rencontroient en quelqu'autre point S, différent de C, en menant les rayons BS, FS, l'on auroit (à cauſe de BC = BS & de CF = SF) BC + CF = BS + SF, c'eſt-à-dire, BF = BSF ; ce qui eſt viſiblement abſurde.

Pareillement, les deux cercles CSG, LGH, dont F, D ſont les centres, ne peuvent ſe rencontrer en quelque point M, différent de G ; autrement l'on auroit FG = FM ; donc DF + FG = DF + FM ; mais DF + FG, c'eſt-à-dire DG, étant le rayon du cercle LGH (ſupp.), ſeroit égal à DM, auſſi rayon du même cercle ;

donc DF + FM égaleroit DM; ce qui eſt encore abſurde.

D'où il s'enſuit qu'en joignant par une ligne droite les centres B, F, des deux cercles ASC, CSG qui ſe touchent, cette ligne BF paſſera néceſſairement par leur point de contingence C. Car en prenant une autre route, telle que BSF, le point S n'étant pas commun aux deux circonférences, comme on vient de voir, BS + SF ſeroit plus longue que BC + CF, c'eſt-à-dire, qu'alors la ligne droite, menée de B en F, ne paſſeroit pas par le plus court chemin; ce qui eſt impoſſible.

## PROBLÊME.

Etant donnés les trois cercles ATN, ARC, CGN, qui ſe touchent réciproquement par les extrémités A, C, N de leurs diamètres, (& que je ſuppoſe être les profils de trois cylindres) en trouver un quatrième H, qui touche en même-tems les trois premiers (*fig. L. PL. 7.*).

## RÉSOLUTION.

Les deux cercles ARC, CGN étant égaux, parce que je fais AC = CN, il eſt clair que le centre H du cercle cherché doit ſe trouver ſur le rayon CT, élevé perpendiculairement ſur le milieu C du diamètre AN. Il s'agit donc de déterminer la longueur du rayon cherché TH.

Menons BH, qui paſſera néceſſairement par le point de contingence R, comme étant évidemment le plus court chemin; & ſoit AC = CT = CN = $2a$, BC = BR = $a$, TH = RH = $x$, on aura CH = CT − TH = $2a - x$, & BH = BR + RH = $a + x$: alors le triangle rectangle CBH donnera (Cor. 2. du

n°. 288.) $\overline{BH}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CH}^2$ ou $aa + 2ax + xx = aa + 4aa - 4ax + xx$; ou (en ôtant de part & d'autre $aa + xx$, & en transposant $-4ax$) $6ax = 4aa$; donc $x = \frac{4aa}{6a} = \frac{2a}{3}$; ce qui signifie que le rayon TH ou $x$ du cercle cherché, doit être égal au tiers du rayon $CT = 2a$. Ainsi, pour résoudre pratiquement ce Problême, au centre & sur le diamètre AN du cercle enveloppant ATN on élevera perpendiculairement le rayon CT : on en portera le tiers de T en H, & du centre H avec HT, on décrira le cercle RTH, qui touchera les trois cercles proposés.

J'ai dit que la ligne droite, menée de B en H, passoit nécessairement par le point R de contingence, étant clair que si elle n'y passoit pas, elle contiendroit plus que la somme des rayons BR, RH, & par conséquent ne seroit pas comme elle doit être, le plus court chemin de B en H.

## PROPOSITION XXIV.

289. Une perpendiculaire DA (*fig.* 75.) abbaissée d'un point D quelconque de la circonférence d'un cercle sur son diamètre CF, est moyenne proportionnelle entre les parties CA, AF de ce diamètre. Il faut donc démontrer que CA. DA :: DA. AF.

## DÉMONSTRATION.

Prolongez la perpendiculaire DA jusqu'à ce qu'elle coupe la circonférence en un point B, & rappellez-vous qu'un rayon tel que OC perpendiculaire sur une corde DB, coupe nécessairement cette corde en deux parties égales (n°. 122.) : ainsi

DA = AB ; mais, par la proposition précédente, AC. AD :: AB. AF ; donc, mettant dans cette proportion DA au lieu de AB qui lui est égale, elle deviendra CA. DA :: DA. AF. Ce qui fait voir que DA est moyenne proportionnelle entre les parties CA, AF du diamètre ; C. Q. F. D.

La converse de cette proposition est fausse ; c'est-à-dire, il est faux qu'une ligne moyenne proportionnelle entre les parties CA, AF qu'elle coupe sur un diamètre, soit nécessairement une perpendiculaire abbaissée d'un point quelconque de la circonférence à laquelle ce diamètre appartient.

## DÉMONSTRATION.

Du point A de la perpendiculaire DA tirez AG = AD (*fig.* 76.) : AG ne pourra pas être une perpendiculaire sur le diamètre CF ; & cependant cette ligne AG sera moyenne proportionnelle entre les parties CA, AF qu'elle coupe sur le diamètre CF, puisque la perpendiculaire DA étant moyenne proportionnelle entre ces parties, son égale AG le sera aussi ; C. Q. F. D.

## PROPOSITION XXV.

290. En supposant toujours la perpendiculaire DA sur le diametre CF (*fig.* 77.), du point D tirez les lignes DC, DF aux extrémités C, F de ce diamètre ; les Triangles DCA, DFA seront semblables ou équiangles : ils seront aussi semblables au grand triangle CDF.

## DÉMONSTRATION.

1°. Par la supposition, l'angle $x$ = l'angle $y$, puisque DA est perpendiculaire ; & par la proposition précédente, CA. DA :: DA. AF, c'est-

à-dire, que les triangles DCA, DFA ont leurs côtés proportionnels autour d'un même angle : or il a été démontré (n°. 284.) que dans ce cas les triangles étoient équiangles ; par conséquent les triangles DCA, DFA sont semblables ; C. Q. F. 1°. D.

2°. Le grand triangle CDF est semblable au petit triangle DCA : car ces deux triangles ont d'abord l'angle commun C ; en second lieu, ils ont chacun un angle droit, puisque l'angle *x* du petit triangle est droit (par la supposition), & que l'angle CDF du grand triangle est aussi droit, parce qu'un angle à la circonférence, qui s'appuie sur le diamètre, est un angle droit (n°. 104.) : voilà donc deux angles d'une part égaux à deux angles de l'autre part, chacun à chacun ; donc le troisième angle CDA du petit triangle est égal au troisième angle CFD du grand triangle ; par conséquent le grand triangle CDF est équiangle au petit triangle DCA : ces deux triangles sont donc semblables ; C. Q. F. 2°. D.

3°. Le grand triangle CDF est aussi semblable à l'autre petit triangle DFA : car le petit triangle DFA étant, par la première partie de cette proposition, semblable au petit triangle DCA, que l'on vient de démontrer être semblable au grand triangle CDF, c'est une nécessité que deux triangles semblables à un troisième, soient semblables entr'eux ; par conséquent le grand triangle CDF est semblable au petit triangle DFA ; C. Q. F. 3°. D.

Vous pouvez démontrer autrement que le grand triangle CDF est semblable au petit triangle DFA : car, 1°. Ces deux triangles ont l'angle F commun. 2°. Ils ont chacun un angle droit, puisque (par la supp.) l'angle *y* du petit triangle

DFA eſt droit : & que l'angle CDF du grand triangle eſt auſſi un angle droit, comme il a été démontré ; ainſi le troiſième angle FDA du petit triangle eſt égal au troiſième angle DCF du grand triangle. Ces deux triangles ſont donc équiangles, & par conſéquent ils ſont ſemblables.

Afin que l'on reconnoiſſe quels ſont les angles égaux qui ſe répondent dans les deux triangles ſemblables DCA, DFA, il faut marquer les angles correſpondans par des ſignes ſemblables, comme j'en ai déja averti. Je le répete ici, parce que cela nous donne un moyen très-commode de comparer les côtés proportionnels des triangles ſemblables.

La converſe de la propoſition 25 n'eſt d'aucune utilité.

## *REMARQUE.*

291. Le triangle CDF eſt donc un triangle rectangle, dont le diamètre CF eſt l'hypothénuſe, & la ligne DA eſt une perpendiculaire abbaiſſée de l'angle droit ſur l'hypothénuſe. On voit donc que ſi de l'angle droit d'un triangle rectangle on abbaiſſe une perpendiculaire ſur l'hypothénuſe, non-ſeulement cette perpendiculaire eſt moyenne proportionnelle entre les parties de l'hypothénuſe ; mais qu'elle diviſe encore le grand triangle en deux petits triangles ſemblables au grand triangle & ſemblables entr'eux. On doit bien retenir cette remarque.

## PROPOSITION XXVI.

292. Si de l'angle droit D d'un triangle rectangle (*fig.* 77.) l'on abbaiſſe une perpendiculaire DA ſur l'hypothénuſe CF, je dis que chaque côté du triangle devient une moyenne proportionnelle entre l'hypothénuſe CF, & le ſegment qui répond

à ce côté ; c'eſt-à-dire, que l'on aura, 1°. CF. CD :: CD. CA ; 2°. CF. DF :: DF. AF.

## DÉMONSTRATION.

1°. Suivant la propoſition 25 & le n°. 291, le grand triangle CDF eſt ſemblable au petit triangle CDA ; par conſéquent les côtés, oppoſés à des angles égaux, forment une proportion. Donc CF du grand triangle, oppoſé à l'angle droit CDF, eſt à CD oppoſé à l'angle droit A du petit triangle, comme CD, oppoſé à l'angle F du grand triangle, eſt à CA oppoſé à l'angle CDA = F, ou plus ſimplement CF. CD :: CD. CA ; C. Q. F. 1°. D.

2°. Par la même Propoſition 25 & le n°. 291, le grand Triangle CDF eſt ſemblable au petit triangle DFA ; donc les côtés de ces triangles ſont en proportion. Par conſéquent CF. DF :: DF. AF ; C. Q. F. 2°. D.

La converſe de cette Propoſition eſt vraie ; c'eſt-à dire que, ſi les côtés CD, DF d'un triangle rectangle CDF deviennent moyens proportionnels entre l'hypothénuſe entière, & les ſegmens correſpondans, faits par une ligne abbaiſſée du ſommet de l'angle droit, cette ligne ſera néceſſairement perpendiculaire ſur l'hypothénuſe. (*fig.* 77.)

Il faut donc démontrer que, ſi l'on a, par exemple, CF. DF :: DF. AF, on aura néceſſairement les triangles CDF, DFA équiangles.

## DÉMONSTRATION.

1°. Les triangles CDF, DFA ont l'angle F commun. 2°. Ils ont les côtés autour de ce même angle proportionnels : car c'eſt l'hypothèſe. Or, (par le Corollaire 1. de la Prop. 22. n°. 284.) ſi un angle d'un triangle eſt égal à un angle d'un autre

triangle, & que de plus les côtés qui ſont autour du premier angle, ſoient proportionnels aux côtés qui ſont autour du ſecond, ces deux triangles ſont néceſſairement ſemblables, ou, ce qui eſt la même choſe, leurs angles oppoſés aux côtés proportionnels ſont égaux; donc, puiſque les deux triangles CDF, DFA ont ces propriétés; il faut que les angles qui ſont oppoſés à leurs côtés proportionnels ſoient égaux; donc l'Angle DAF oppoſé à DF, eſt égal à l'angle CDF oppoſé à CF; mais (par la ſupp.) l'angle CDF eſt droit; donc l'angle DAF eſt auſſi un angle droit; Ainſi DA eſt une perpendiculaire; C. Q. F. D.

D'où l'on peut déduire une démonſtration du quarré de l'hypothénuſe.

## PROPOSITION XXVII.

293. Le quarré CBSF (*fig.* 78.) fait ſur l'hypothénuſe CF du triangle CDF rectangle en D, eſt égal à la ſomme des quarrés CDLM, DFPΓ, conſtruits ſur les deux autres côtés.

Afin d'abréger le diſcours, j'appellerai $\overline{CF}^2$ le quarré fait ſur CF; $\overline{CD}^2$ ſera auſſi l'expreſſion du quarré fait ſur le côté CD; & $\overline{DF}^2$ déſignera le quarré fait ſur le côté DF.

Il faut donc prouver que $\overline{CF}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DF}^2$.

## DÉMONSTRATION.

De l'angle droit D abbaiſſez ſur l'hypothénuſe la perpendiculaire DA, que vous prolongerez juſqu'au point O, afin qu'elle partage le quarré $\overline{CF}^2$ en deux rectangles CBOA, AOSF. Or ſi l'on démontre que le rectangle CBOA $= \overline{CD}^2$, & que le rectangle AOSF $= \overline{DF}^2$, on aura auſſi

démontré

démontré que le quarré $\overline{CF}^2$, qui vaut ces deux rectangles, eſt auſſi égal aux quarrés $\overline{CD}^2$, $\overline{DF}^2$, pris enſemble.

Mais (par la Prop. XXVI.) on a CF. CD :: CD. CA. Donc CA × CF, ou CA × CB = $\overline{CD}^2$ = $\overline{CD}^2$. L'on a encore (par la même Prop.) CF. DF :: DF. AF. Donc AF × CF, ou AF × AO = $\overline{DF}^2$.

Or CA × CB eſt la valeur du rectangle CBOA; & AF × AO eſt celle du rectangle AOSF; (n°. 165.) par conſéquent, puiſque CA × CB = $\overline{CD}^2$, le rectangle CBOA eſt égal au quarré fait ſur CD; & comme auſſi AF × AO = $\overline{DF}^2$, on voit que le rectangle AQSF eſt égal au quarré fait ſur DF. Par conſéquent la ſomme des rectangles AOSF, CBOA, eſt égale à la ſomme des quarrés $\overline{CD}^2$, $\overline{DF}^2$: mais le quarré $\overline{CF}^2$ de l'hypothénuſe eſt égal à la ſomme des deux rectangles; donc il eſt auſſi égal à la ſomme des deux quarrés; c'eſt-à-dire, que $\overline{CF}^2$ = $\overline{CD}^2$ + $\overline{DF}^2$; C. Q. F. D. (*a*).

(*a*) On attribue cette découverte à Pithagore, qui fit, dit-on, en reconnoiſſance, un hécatombe, ou ſacrifice de cent bœufs aux Muſes.

Quand on a ſeulement parcouru les différentes parties des Mathématiques, il faut convenir que cette Propoſition eſt d'un grand ſecours.

Mais comment Pithagore a-t-il vu les avantages qui devoient en réſulter? Avoit-il trouvé auparavant un grand nombre de Propoſitions fondées ſur celle-ci, & qui n'attendoient que cette découverte pour être miſes elles mêmes au nombre des grandes découvertes? L'Hiſtoire n'en dit rien.

J'ai lu quelque part qu'elle lui avoit beaucoup ſervi à perfectionner l'Arithmétique : je la crois très-peu néceſſaire à cet objet. Il m'a toujours paru biſarre que l'on démontrât l'Arithmétique par la Géométrie : on tombe non ſeulement dans un cercle vicieux, puiſque la Géométrie a néceſſairement beſoin de l'Arithmétique; mais encore on renonce par-là à une déduction parfaite, à cette génération de vérités qui doivent toutes procéder du même principe, autant que cela eſt poſſible : or en appliquant à l'Arithmétique les principes de

La converſe de cette Propoſition eſt vraie ; elle a été démontrée (n°. 189.).

## *COROLLAIRE I.*

294. Puiſque $\overline{CF}^2$ ou $CF \times CF = \overline{CD}^2 + \overline{DF}^2$ (*fig.* 78.) ; donc en tirant la racine quarrée de l'un & de l'autre membre, on aura $CF = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{DF}^2}$ (*a*) ; c'eſt-à-dire que, ſi l'on connoît les deux côtés qui forment un angle droit, on aura la longueur de l'hypothénuſe, en tirant la racine quarrée de la ſomme des quarrés des deux côtés connus.

la Géométrie, on change d'objet : les concluſions ne ſont plus tirées d'un ſeul principe, à moins qu'on ne veuille dire qu'il ſeroit beaucoup mieux de commencer par la Géométrie pour paſſer à l'Arithmétique, ce qui n'eſt pas ſoutenable ; l'expérience & le bon ſens renverſent cette prétention.

Je conçois facilement la grande ſenſibilité de Pithagore à l'inſtant de ſa découverte : elle lui rendoit un témoignage non équivoque de la force de ſon génie. Voilà pourquoi ceux qui ont une fois goûté des Mathématiques, pourſuivent avec tant de chaleur les objets de leurs ſpéculations.

Mais la reconnoiſſance de Pithagore me paroît extrême : car il y a bien d'autres vérités en Géométrie plus ſublimes & plus utiles, dont les Inventeurs ne ſe ſont pas livrés à des tranſports ſi marqués. Telles ſont celles qui enſeignent que *les trois angles d'un triangle ſont égaux à deux angles droits* ; Que *les triangles ſemblables ont leurs côtés proportionnels* ; & celles par où l'on réſout tous les Problêmes de la *Trigonométrie* moyennant les *ſinus*.

(*a*) Preſque tous les Commençans ſont portés à croire que la racine quarrée de la ſomme de deux quarrés eſt égale à la ſomme des racines des deux quarrés ; ils s'imaginent, par exemple, que la racine quarrée des deux quarrés $a\,a + b\,b$, priſes enſemble, eſt égale à la ſomme $a + b$ des racines de chaque quarré.

C'eſt une penſée, dont ils reconnoîtront facilement l'erreur, s'ils réfléchiſſent qu'une racine quarrée multipliée par elle même doit produire le quarré dont elle eſt racine. Or en multipliant $a + b$ par $a + b$, le produit eſt $a\,a + 2\,a\,b + b\,b$, & non pas $a\,a + b\,b$, comme les premières apparences ſemblent l'annoncer ; par conſéquent de ce que le quarré de l'hypothenuſe eſt égal à la ſomme des quarrés des deux côtés, on auroit tort de conclure que l'hypothénuſe devroit être égale à la ſomme des côtés ; propoſition qui ſeroit d'ailleurs contraire aux premiers principes de la Géométrie, par leſquels il eſt évident qu'une ligne droite eſt plus courte qu'une ligne courbe ou anguleuſe, qui a les mêmes extrémités. On eſt ſi peu accoutumé à des idées préciſes dans l'uſage ordinaire de la vie, que l'on regarde ſouvent com-

## COROLLAIRE II.

295. En ſuppoſant toujours $\overline{CF}^2$, ou $CF \times CF = \overline{CD}^2 + \overline{DF}^2$, on aura $\overline{CF}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{DF}^2$, ou $\overline{CF}^2 - \overline{DF}^2 = \overline{CD}^2$; & par conſéquent $DF = \sqrt{\overline{CF}^2 - \overline{CD}^2}$, ou $CD = \sqrt{\overline{CF}^2 - \overline{DF}^2}$; ce qui veut dire qu'en connoiſſant l'hypothénuſe & l'un des côtés, on trouvera l'autre côté, ſi l'on extrait la racine quarrée de la différence qu'il y aura entre le quarré de l'hypothénuſe, & le quarré du côté connu.

## COROLLAIRE III.

Il s'enſuit encore que la Diagonale LC d'un quarré (*fig.* 78.) eſt incommenſurable avec l'un de ſes côtés MC; c'eſt-à-dire, qu'en prenant une grandeur quelconque, qui meſure exactement le côté MC, cette grandeur ne meſurera pas exactement la Diagonale LC : il y aura toujours de l'excès ou du défaut, & l'on ne pourra pas déterminer le rapport numérique de cet excès ou de ce défaut à la grandeur qui aura ſervi de meſure.

## DÉMONSTRATION.

Car (295.) $\overline{LC}^2 = \overline{ML}^2 + \overline{MC}^2 = 2\overline{MC}^2$ (puiſque ML = MC) : ainſi en tirant des racines quarrées, $LC = \sqrt{2\overline{MC}^2}$; quantité inaſſignable à toute rigueur, $2\overline{MC}^2$ n'étant pas un quarré parfait. Par exemple, ſi l'on ſuppoſe MC long

me des vérités fort naturelles, les fauſſetés les plus avérées; & c'eſt une des principales raiſons qui ont déterminé les Mathématiciens à démontrer ce qui ne paroît pas avoir beſoin de démonſtration.

de 1 pied, on ne pourra pas déterminer préciſément la partie numérique que la Diagonale LC contiendra au-deſſus d'un pied : car alors LC $= \sqrt{2}$ pieds quarrés; mais il eſt impoſſible de trouver en nombre précis la racine quarrée de 2. Donc, &c. C. Q. F. D.

Ainſi, quoique l'on puiſſe trouver la longueur de la racine quarrée de deux pieds quarrés, on ne peut pas ſçavoir ſon rapport numérique à 1 pied courant. Il y a donc incommenſurabilité entre la Diagonale d'un quarré & ſon côté.

## PROPOSITION XXVIII.

296. Si du ſommet D de l'angle obtus d'un triangle obtuſangle, ou de l'angle aigu d'un triangle acutangle quelconque CDF ſcalène (*fig.* 79.), on abbaiſſe une perpendiculaire DA ſur le côté oppoſé CF, il arrivera que le quarré du côté CF, oppoſé à l'angle D, ſera égal à la différence des quarrés des deux autres côtés DF, CD, plus deux fois le rectangle du côté CF par le petit ſegment CA.

Suppoſons DF > DC, afin d'avoir le ſegment CA < AF. Soit de plus $CF = a$, $DF = b$, $DC = c$, $CA = x$, $AF = a - x$, $DA = y$. Il s'agit de démontrer que $\overline{CF}^2 = \overline{DF}^2 - \overline{CD}^2 + 2\,CF \times CA$; ou, en ſubſtituant les valeurs de ces côtés, que $aa = bb - cc + 2ax$.

## DÉMONSTRATION.

Remarquez que la perpendiculaire DA diviſe le triangle CDF en deux triangles DAC, DAF, rectangles en A; ainſi (par la Prop. précéd.) le quarré du côté DF eſt égal à la ſomme des quarrés

faits sur les deux côtés D A, A F; &, en exprimant cette égalité algébriquement, on a cette équation $bb = aa - 2ax + xx + yy$.

Par la même raison, le quarré du côté C D est égal à la somme des quarrés des côtés D A, C A; ce qui produit cette autre équation, $cc = xx + yy$; par conséquent, en substituant $cc$ en la place de $xx + yy$ dans l'équation précédente, elle sera $bb = aa - 2ax + cc$; donc, en transposant les termes $-2ax + cc$ du second membre de cette équation dans le premier, on aura $bb - cc + 2ax = aa$; C. Q. F. D.

## COROLLAIRE I.

297. Par conséquent, si l'on connoît les trois côtés d'un triangle obtusangle ou acutangle, il sera très-facile de déterminer la valeur de l'un des deux segmens faits par une perpendiculaire, que l'on imagineroit abbaissée de l'angle obtus, ou de l'angle aigu sur le côté opposé à cet angle.

Car en reprenant l'équation précédente $bb - cc + 2ax = aa$, on aura, en transposant, $2ax = aa + cc - bb$; donc $x = \frac{aa + cc - bb}{2a}$; ce qui signifie que le petit segment C A se détermine, en faisant la somme des quarrés du petit côté C D, & du côté C F, sur lequel tombe la perpendiculaire D A, de laquelle somme on doit retrancher le quarré de l'autre côté D F, pour en diviser le reste par le double du côté C F: car le quotient de cette division donne la valeur du petit segment C A.

## COROLLAIRE II.

298. On peut donc évaluer un triangle obtusangle ou acutangle par la seule connoissance de ses trois côtés, puisque après avoir déterminé le petit

ſegment C A (par le Coroll. 1.) que nous pouvons appeller $d$, le triangle rectangle C A D (*fig.* 79.) donne $cc = dd + yy$; donc $yy = cc - dd$; par conſéquent $\sqrt{cc - dd} = y$ qui repréſente la perpendiculaire D A, que l'on connoîtra, comme l'on voit, en retranchant le quarré du petit ſegment C A $= d$ du quarré du petit côté D C $= c$, & tirant enſuite la racine quarrée de ce reſte. Or, quand on connoît la baſe & la hauteur d'un triangle, ſa ſurface eſt connue; donc on peut meſurer un triangle par la ſeule connoiſſance de ſes trois côtés; ce qui eſt d'un grand ſecours dans la pratique, où il n'eſt pas toujours poſſible d'abbaiſſer des perpendiculaires. Cette vérité a déja été prouvée (n°. 194.): il eſt à remarquer qu'en déterminant le grand ſegment A F, on trouveroit de même la perpendiculaire D A.

## *COROLLAIRE III.*

299. En nous tenant toujours à la ſuppoſition de la Prop. 28, ſi les deux côtés C D, D F ſont égaux, la perpendiculaire D A tombera ſur le milieu du côté C F (*fig.* 79.), & rendra par conſéquent égaux les deux ſegmens de ce côté, ce que l'équation $bb - cc + 2ax = aa$ fait connoître: car, puiſque l'on ſuppoſe $b = c$, l'équation deviendra $2ax = aa$, en effaçant les deux termes $bb - cc$ qui ſe détruiſent; donc $x = \frac{aa}{2a} = \frac{a}{2}$; ainſi le ſegment C A $= x$ ſera égal à la moitié du côté C F $= a$; donc l'autre ſegment ſera égal à l'autre moitié.

300. Mais comment juger par la ſimple connoiſſance des côtés, ſi un triangle eſt rectangle, obtuſangle ou acutangle (*fig.* 80)?

Cela eſt fort aiſé : nous avons vû qu'un triangle C D F rectangle en D, donnoit toujours le quarré de l'hypothénuſe égal à la ſomme des quarrés faits ſur les deux autres côtés (n°. 293.) ; mais ſuppoſons que l'angle droit C D F vienne à s'ouvrir ou à ſe fermer, que ſon côté D C devienne D S ou D M, ſans changer de longueur, il eſt clair que l'angle S D F étant obtus, le point S ſera plus éloigné du point F que le point C : ainſi S F ſera plus grande que l'hypothénuſe C F, & par conſéquent le quarré du côté S F oppoſé à l'angle obtus S D F, ſera plus grand que la ſomme des quarrés faits ſur les deux autres côtés.

On voit pareillement qu'en diminuant l'angle droit C D F qui peut devenir M D F, le point M du côté D M = D C ſera plus près du point F que le point C ; d'où il réſulte que M F eſt plus petite que l'hypothénuſe C F, & par conſéquent que le quarré de M F, oppoſé à l'angle aigu M D F, eſt plus petit que la ſomme des quarrés faits ſur les deux autres côtés D M, D F.

Quand vous voudrez donc déterminer de quelle eſpèce eſt le triangle dont vous connoiſſez les trois côtés, faites le quarré du plus grand côté : ſi ce quarré eſt égal à la ſomme des quarrés faits ſur les deux autres côtés, le triangle eſt rectangle ; s'il eſt plus grand, le triangle eſt obtuſangle ; & s'il eſt plus petit, le triangle eſt acutangle. On a déja fait cette obſervation (n°. 191.) ; mais elle n'avoit pas été démontrée à la rigueur.

Nous n'avons pas beſoin d'étendre davantage la théorie des lignes proportionnelles. Le petit nombre de Propoſitions que nous venons d'établir, eſt ſuffiſant pour faire concevoir la méthode de lever toutes ſortes de plans, de conſtruire des Cartes Topographiques, c'eſt-à-dire, de quelques lieux par-

riculiers, de réduire des figures de grand en petit, ou de petit en grand, de trouver le rapport des figures ſemblables, tant de leurs contours que de leurs ſurfaces, de changer une figure en une autre, ſans en augmenter ni en diminuer l'étendue, & enfin de pluſieurs figures en faire une ſeule, qui n'ait pas plus de ſurface que toutes celles qui doivent la compoſer; la réſolution des Problêmes ſuivans en ſera une preuve inconteſtable.

## PROBLÊME.

301. Déterminer le rapport des circuits, des contours ou des périmètres des *figures ſemblables* différentes du triangle (*fig.* 81.).

Les *figures ſemblables* ſont celles qui ont tous leurs angles égaux, chacun à chacun, & les côtés qui font les angles égaux, proportionnels. Ces figures peuvent être régulières ou irrégulières. Les figures régulières ont tous leur côtés égaux & tous leurs angles égaux; mais, quand il y a de l'inégalité dans les côtés ou dans les angles d'une figure, on dit qu'elle eſt *irrégulière*. Le *circuit*, le *contour* ou le *périmètre* d'une figure, eſt une ligne telle que ABCDEG, qui enveloppe ou environne toute la ſurface de cette figure. Cherchons d'abord quel eſt le rapport des périmètres des figures régulières: prenons les deux exagones réguliers ABCDEG, *abcdeg*.

## RÉSOLUTION.

302. Puiſque tous les côtés du grand exagone ſont égaux auſſi-bien que ceux du petit, AB contient *ab*, comme ſix fois AB contient ſix fois *ab*; donc $AB.ab :: 6AB.6ab$. Or $6AB = ABCDEG$, & $6ab = abcdeg$; par conſéquent $AB.ab :: ABCDEG.abcdeg$; ce qui

signifie, que *les circuits des figures régulières du même nombre de côtés ſont entr'eux comme un côté eſt à un côté.*

En ſecond lieu, ſi les figures ſont irrégulières (*fig.* 82.), mais ſemblables, c'eſt-à-dire, ſi l'angle $A = a$, $B = b$, $C = c$, $D = d$, $F = f$, & que les côtés qui forment ces angles, ſoient proportionnels, ou que l'on ait $AB . ab :: BC . bc :: CD . ad :: DF . df :: FA . fa$, il eſt évident (n°. 258.) que la ſomme des antécédens $AB + BC + CD + DF + FA$, eſt à la ſomme des conſéquens $ab + bc + cd + df + fa$, comme un antécédent quelconque AB eſt à ſon conſéquent $ab$; mais la ſomme des antécédens compoſe les circuits de part & d'autre; donc les *périmètres ou les circuits des figures ſemblables, ſont entr'eux comme un côté quelconque eſt à ſon côté correſpondant;* C. Q. F. D.

Il eſt bon de ſçavoir que les Géomètres appellent *côtés homologues*, les côtés correſpondans dans les figures ſemblables : ainſi AB & $ab$, BC & $bc$, &c. ſont des côtés homologues; c'eſt pourquoi on dit ordinairement, que *les circuits des figures ſemblables ſont entr'eux comme les côtés homologues de ces figures.*

## *COROLLAIRE I.*

303. Si des points A, $a$ (*fig.* 82.), on tire les lignes AD, AC d'une part, & les lignes $ad$, $ac$ de l'autre part : je dis que les périmètres de ces figures ſont entr'eux comme les lignes AD, $ad$, ou AC, $ac$ ſemblablement tirées, c'eſt-à-dire, tirées d'un angle correſpondant à un angle *correſpondant* (*a*).

(*a*) J'appelle *Angle correſpondant*, l'angle d'une figure égal à l'angle d'une autre figure ſemblable : c'eſt pourquoi je marquerai toujours par les mêmes lettres les angles correſpondans, afin que l'on puiſſe les reconnoître ſans peine.

Car (par le Problême précédent) les circuits de ces figures ſont entr'eux comme un côté A B eſt à ſon côté homologue *a b ;* mais puiſque (ſupp.) l'angle B = *b*, & que A B . *a b* : : B C . *b c*, les triangles A B C, *a b c* ſont ſemblables (n°. 284.); par conſéquent A B . *a b* : : A C . *a c ;* donc les circuits ſeront auſſi comme A C, *a c :* c'eſt-à-dire, en peu de mots, que *les périmètres des figures ſemblables ſont entr'eux comme les lignes ſemblablement tirées dans ces figures.*

Par conſéquent les périmètres des figures ſemblables ſont entr'eux comme les perpendiculaires F S, *f s*, abbaiſſées des angles correſpondans, F, *f*, ſur les côtés homologues A D, *a d*.

Dans les figures ſemblables régulières (*fig.* 81.), les périmètres ſont auſſi comme les rayons droits O M, *o m*, ou comme les rayons obliques O G, *o g*, parce que ces rayons ſont des côtés homologues.

## *COROLLAIRE II.*

304. Repréſentez-vous les deux cercles *x*, *y*, que l'on ait diviſés en un nombre égal de parties égales, dont les points de diviſion ſoient ſi proches les uns des autres, que les cordes tirées d'un point quelconque à un point voiſin, paroiſſent ſe confondre avec les arcs, dont elles ſont les ſous-tendantes ; comme les courbures des cercles ſont uniformes, ſi l'on a diviſé, par exemple, en trente parties égales chaque circonférence, une trentième partie de la première ſera à une trentième partie de la ſeconde, comme une autre trentième partie de la première eſt à une autre trentième partie de la ſeconde, & ainſi de ſuite juſqu'aux dernières parties : par conſéquent toutes les parties de l'une ſeront à toutes les parties de l'autre, comme une partie eſt à une partie ; ou autrement, la circonférence

entière du premier cercle ſera à la circonférence entière du ſecond, comme un arc du premier eſt à l'arc correſpondant du ſecond. Mais quand la diviſion de la circonférence eſt pouſſée très-loin, les arcs ſe confondent avec leurs cordes, & n'en ſont plus différens; par conſéquent les circonférences ſont entr'elles, comme les cordes A B, *a b* des arcs correſpondans : or les cordes des arcs correſpondans ſont entr'elles comme les rayons A C, *a c* de leurs cercles, parce qu'il eſt viſible que les triangles A C B, *a c b* ſont ſemblables, lorſque l'arc A B eſt une même partie de ſa circonférence que l'arc *a b* l'eſt de la ſienne, l'angle A C B au centre étant alors égal à l'angle au centre *a c b*, & les côtés de ces angles étant proportionnels (n°. 284.); donc, puiſque les circonférences des cercles ſont entr'elles comme les cordes de leurs arcs correſpondans, & que ces cordes ſont entr'elles comme les rayons de leurs cercles, il s'enſuit que *les périmètres ou les circonférences ſont entr'elles comme leurs rayons*, ou, ſi l'on veut encore, *comme leurs diamètres qui ſont doubles des rayons.*

Voilà pourquoi les Géomètres regardent les cercles comme des Polygones ſemblables. Cette idée eſt très-exacte; on ne peut en conteſter la valeur, quand on a jetté un regard attentif ſur la courbure du cercle.

## *COROLLAIRE III.*

305. Les circonférences des cercles étant entr'elles comme leurs rayons ou comme leurs diamètres, il s'enſuit qu'une circonférence eſt double, triple, quadruple, &c. d'une autre circonférence, quand ſon rayon ou ſon diamètre eſt double, triple ou quadruple du rayon ou du diamètre de cette autre circonférence.

## PROBLÊME.

306. Trouver le rapport des ſurfaces des figures ſemblables.

## RÉSOLUTION.

1°. Commençons par les triangles ſemblables BAC, *bac* (*fig.* 84.). Des angles B, *b* correſpondans, abbaiſſons les perpendiculaires BD, *bd* ſur les côtés homologues AC, *ac*; il eſt évident que les triangles rectangles BDA, *bda* ſont ſemblables, & qu'ainſi AC. *ac* :: BD. *bd* (n°. 283.). Appellons S la ſurface du grand triangle; ſoit auſſi ſa baſe AC = B & ſa hauteur BD = H. De même nommons *s* la ſurface du petit triangle, *b* ſa baſe *ac*, & *h* ſa hauteur *bd*. Puiſque la baſe AC eſt à la baſe *ac*, comme la hauteur BD eſt à la hauteur *bd*, on aura B . *b* :: H . *h*, ou $\frac{B}{b} = \frac{H}{h}$; donc $\frac{BB}{bb} = \frac{BH}{bh}$. Mais nous ſçavons que les ſurfaces des Triangles ſont entr'elles comme les produits de leur baſe par leur hauteur (n°. 274.); donc S . *s* :: BH . *bh*, ou $\frac{S}{s} = \frac{BH}{bh}$, & mettant $\frac{BB}{bb}$ au lieu de $\frac{BH}{bh} = \frac{BB}{bb}$, ainſi qu'on l'a trouvé ci-deſſus, on a cette équation, $\frac{S}{s} = \frac{BB}{bb}$, ou S . *s* :: BB . *bb* : c'eſt-à-dire, que *les ſurfaces des triangles ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues*, puiſque AC eſt homologue à la baſe *ac*; C. Q. F. D.

2°. Les Parallélogrames étant doubles des triangles, il eſt évident que les Parallélogrames ſemblables ſont auſſi entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues.

3°. Reprenons les Pentagones irréguliers ſem-

blables (*fig.* 82.), dans lesquels des angles A, *a* correspondans, on a tiré les lignes AD, AC, & *ad*, *ac*, qui divisent chaque figure en autant de triangles l'une que l'autre. On peut se convaincre aisément que chaque triangle de l'un est semblable au triangle correspondant de l'autre; par exemple, le triangle ABC est semblable au triangle *abc*: car (par la supp.), l'angle B = *b*, & AB. *ab* :: BC. *bc*; donc (n°. 284.) le triangle ABC est semblable au triangle *abc*: ainsi BC. *bc* :: CA. *ca*; mais BC. *bc* :: CD. *cd*; donc CA. *ca* :: CD. *cd*; de plus, les angles BCA, *bca*, opposés aux côtés homologues AB, *ab*, sont égaux, ce qui rend aussi égaux les angles DCA, *dca*; par conséquent dans les triangles ACD, *acd*, vous avez les angles C, *c* égaux, & les côtés CA, CD de l'un, proportionnels aux côtés *ca*, *cd* de l'autre; donc (n°. 284.) les triangles ACD, *acd* sont semblables. Vous trouverez, en continuant, que le triangle AFD est semblable au triangle *afd*; ainsi tous les triangles de la grande figure sont semblables à tous les triangles de la petite, chacun à son correspondant.

Cela supposé, puisque les Pentagones irréguliers sont semblables, BC. *bc* :: CD. *cd* :: DF. *df*; donc (n°. 253.) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{bc} :: \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{cd} :: \overrightarrow{DF}.\overrightarrow{df}$. Mais de plus les triangles de l'un sont semblables aux triangles correspondans de l'autre, comme on vient de voir : ainsi (n°. 1°. de cet art.) $T$ABC. $T$*abc* :: $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{bc}$, & $T$ACD. $T$*acd* :: $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{cd}$; ainsi comme le rapport de $\overrightarrow{BC}$ à $\overrightarrow{bc}$ est égal au rapport de $\overrightarrow{DC}$ à $\overrightarrow{dc}$, on a $T$ABC. $T$*abc* :: $T$ACD. $T$*acd*: enfin $T$ADF. $T$*adf* :: $\overrightarrow{DF}$.

à B D : cette parallèle détermine la ligne D X, qui eſt la quatrième proportionnelle cherchée.

## DÉMONSTRATION.

Lorſque deux côtés d'un triangle C A X ſont coupés par une ligne parallèle à ſon troiſième côté, ces côtés ſont coupés proportionnellement (n°. 279.) : or c'eſt ce que fait la conſtruction ; par conſéquent A B . B C : : A D . D X : ainſi D X eſt la quatrième proportionnelle que l'on demandoit ; C. Q. F. D.

## PROBLÊME.

308. Trouver une troiſième proportionnelle aux deux lignes A B, B C (*fig.* 86.).

## RÉSOLUTION.

Elle eſt la même que ci-deſſus : car, après avoir porté ſur l'un ou l'autre côté d'un angle quelconque O A M la première ligne A B, & du point B, où elle ſe termine, la ſeconde ligne B C, on portera cette même ſeconde ligne de A en G ſur l'autre côté A M ; on joindra les points B, G, & par le point C tirant une parallèle C X à la ligne B G, cette parallèle ira déterminer ſur le côté A M la ligne G X, qui eſt la troiſième proportionnelle aux deux lignes A B, B C ; ce qui eſt évident, puiſque A B . B C : : A G ou B C . G X ; C. Q. F. T. & D.

## PROBLÊME.

309. Trouver une moyenne proportionnelle entre les deux lignes A B, B D (*fig.* 87.).

## RÉSOLUTION.

Mettez ſur une même ligne A D les deux lignes A B,

AB, BD, l'une précisément à la suite de l'autre, & marquez le point B qui les sépare : coupez AD en deux parties égales au point C, & de ce point avec le rayon CA ou CD, décrivez une demi-circonférence ; enfin élevez au point B la perpendiculaire BS : elle sera moyenne proportionnelle entre les lignes AB, BD.

## DÉMONSTRATION.

Rappellez-vous la Proposition 24 (n°. 289.) où il a été démontré qu'une perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de la circonférence d'un cercle sur son diamètre, est moyenne proportionnelle entre les parties de ce diamètre qu'elle coupe : or la ligne BS tombe dans ce cas ; elle est donc moyenne proportionnelle entre les lignes AB, BD ; c'est-à-dire, que AB. BS :: BS. BD, ainsi qu'on le demandoit ; C. Q. F. T. & D.

## PROBLÊME.

310. Couper une ligne BA en deux parties, telles que la ligne entière AB soit à une de ces parties BO, comme cette même partie BO est à l'autre partie OA.

On énonce ordinairement ce Problême ainsi : *Couper la ligne AB en moyenne & extrême raison.*

Il faut donc trouver cette proportion AB. BO :: BO. OA (*fig.* 88.).

## RÉSOLUTION.

Sur l'une des extrémités A de la ligne AB donnée, élevez la perpendiculaire AC = la moitié de AB : du point C avec le rayon CA, décrivez un cercle dont la ligne AB sera nécessairement tangente (n°. 105.), & de l'extrémité B de la ligne

AB, menez BC au centre du cercle; la partie BS hors du cercle ſera la moyenne cherchée: ainſi portant BS de B en O, la ligne AB ſera coupée en moyenne & extrême raiſon, c'eſt-à-dire, que l'on aura AB.BO::BO.OA.

## DÉMONSTRATION.

Puiſque le rayon du cercle eſt égal à la moitié de AB (par la conſt.), ſon diamètre GS = AB; ainſi BS = BG — AB: or BO = BS (conſt.); donc BO = BG — AB, & AO = AB — BS = AB — BO.

Rappellez-vous maintenant le Corollaire de la Propoſition 23 (n°. 288.) où il a été démontré qu'une tangente eſt moyenne proportionnelle entre la ſécance entière BG, & ſa partie BS hors du cercle: on aura donc BG.AB::AB.BS; donc (n°. 251.) BG — AB (BS ou BO).AB:: AB — BS (AO).BS ou BO; c'eſt-à-dire plus ſimplement, BO.AB::AO.BO; donc en renverſant (n°. 230.) AB.BO::BO.AO; la ligne AB eſt donc coupée, ainſi qu'on le demandoit. On va voir l'uſage de ce Problême.

## PROBLÊME.

311. Déterminer le rapport du côté AB du Décagone inſcrit dans un cercle au rayon CB de ce cercle (*fig.* 89.).

## RÉSOLUTION.

Tirez le rayon CA: l'angle ACB = 36 degrés, c'eſt-à-dire, la dixième partie de 360; ainſi en retranchant cet angle de 180 degrés, valeur des trois angles du triangle iſoſcèle CAB, il reſte 144 degrés pour la valeur des deux angles A, B;

& comme ces deux angles ſont égaux, il s'enſuit que chacun d'eux = 72 degrés, moitié de 144. Coupons un de ces angles C A B en deux parties *s*, *x* égales ; l'angle *s* & l'angle *x* ſeront chacun de 36 degrés ; l'angle *c*, au centre, étant auſſi de 36 degrés, il s'enſuit 1°. que le triangle C O A eſt iſoſcèle, & qu'ainſi C O = O A. 2°. Le triangle O A B eſt auſſi iſoſcèle : car l'angle *x* = 36 degrés ( par la conſt. ), l'angle B en vaut 72 ; reſte donc auſſi 72 degrés pour l'angle A O B ; donc O A = A B : ainſi C O, O A, A B, ſont trois lignes égales ; mais il a été démontré ( n°. 281. ) que ſi l'on coupoit un angle quelconque C A B d'un triangle en deux parties égales, la baſe C B de cet angle ſeroit néceſſairement coupée en deux ſegmens C O, O B proportionnels aux deux côtés C A, A B qui forment cet angle : or l'angle C A B a été coupé en deux parties égales ; donc C A . A B :: C O . O B : mais C A = C B, & A B = C O ; par conſéquent C B . C O :: C O . O B : ainſi C O eſt la moyenne proportionnelle du rayon C B coupé en moyenne & extrême raiſon, & par conſéquent *le côté du Décagone* A B = C O *ſe trouve, en prenant la moyenne proportionnelle du rayon, coupé en moyenne & extrême raiſon.*

Réciproquement, ſi l'on coupe le rayon C B en moyenne & extrême raiſon, c'eſt-à-dire, ſi l'on fait C B . C O :: C O . O B, & que l'on porte C O de B en A, l'arc A B ſera de 36^d, ou la corde A B ſera le côté du Décagone inſcriptible au cercle de la *fig.* 89.

## DÉMONSTRATION.

Après avoir tiré A C & A O, nous dirons ; puiſque ( ſupp. ) C B . C O :: C O . O B, à cauſe de A B = C O ( conſt. ), nous aurons C B . A B

:: AB . OB; donc (284.) les deux triangles CBA, OBA ſont équiangles; donc l'angle AOB = ABC, & AO = AB = OC; donc l'angle C = $s$: mais puiſque ABC = BAC = $s + x$, il s'enſuit que AOB = $s + x$; or AOB = C + $s$ (parce qu'il eſt extérieur au triangle AOC); donc $s + x$ = C + $s$; donc $x$ = C, & par conſéquent les trois angles C, $s$, $x$ ſont égaux : à ces trois angles joignons l'angle ABC qui vaut $s + x$, ainſi qu'on l'a déja vû, nous aurons, pour la valeur des trois angles du triangle ABC, les cinq angles égaux C, $s$, $x$, $s$, $x$, = 5 C = 180$^d$; donc C = $\frac{180}{5}$ = 36$^d$, & par conſéquent l'arc AB, meſure de l'angle C au centre, eſt auſſi de 36$^d$; C. Q. F. D.

C'eſt ce que nous avons promis de démontrer dans le premier Livre de nos Inſtitutions, quand il a été queſtion d'inſcrire ou de circonſcrire des Polygones réguliers au cercle. On doit ſe ſouvenir que j'y donne une conſtruction, qui fait connoître à la fois le côté du Décagone & celui du Pentagone, inſcriptibles au même cercle : je vais la répéter ici, parce qu'il faut que je la démontre.

## PROBLÊME.

312. Trouver par une ſeule conſtruction le côté du Décagone & celui du Pentagone, inſcriptibles au même cercle (*fig.* 90.).

## RÉSOLUTION.

Tirez le diamètre AB : élevez perpendiculairement le rayon CD : portez ce rayon de B en S & en O : tirez SO, pour avoir le rayon CB coupé en deux parties égales au point G, parce que la ligne SO ayant deux de ſes points à égale diſtance des extrémités C, B, les aura tous : portez GD

de G en F sur le diamètre, & tirez D F. Je dis que C F est le côté du Décagone, & D F celui du Pentagone, inscriptibles au même cercle.

*Démonstration de la première Partie.*

On aura démontré que C F est le côté du Décagone, si on prouve que cette ligne est la moyenne du rayon coupé en moyenne & extrême raison. Or, en vous rappellant le n°. 310. où l'on a enseigné l'art de couper une ligne en moyenne & extrême raison, vous verrez qu'ayant élevé perpendiculairement sur l'extrémité du rayon D C la ligne C G qui en est la moitié, & décrit du point G un cercle C P, &c. tangent au rayon : vous verrez, dis-je, que la partie D P hors du cercle, est la moyenne du rayon coupé en moyenne & extrême raison ; par conséquent, puisque l'on a fait G D = G F, & que G P = G C, il est évident que D P = F C ; par conséquent F C est aussi la moyenne proportionnelle du rayon coupé en moyenne & extrême raison ; ainsi (n°. 311.) elle est le côté du Décagone inscriptible au cercle ; C Q. F. 1°. D.

Présentement, considérez le triangle rectangle D C F ; comme D C rayon du cercle est le côté de l'Hexagone inscriptible, s'il est vrai que F D soit le côté du Pentagone inscriptible, il faut (n°. 293.) que $\overline{F D}^2$, quarré du côté du Pentagone inscriptible, soit égal à la somme $\overline{F C}^2 + \overline{C D}^2$ des quarrés faits sur le côté de l'Hexagone & sur celui du Décagone, inscriptibles au même cercle : or c'est ce que nous allons démontrer.

*Démonſtration de la ſeconde partie.*

Soit A B le côté du Pentagone (*fig.* 91.); A D ou D B celui du Décagone; C A ou C B rayon du cercle ou côté de l'Héxagone, inſcriptibles au même cercle. Du centre C abbaiſſons une perpendiculaire C S ſur le côté A D du Décagone, & remarquons, 1°. que le triangle A O D eſt un triangle iſoſcèle, parce que C S étant, par la conſtruction, perpendiculaire ſur le milieu du côté A D, le point O, où cette perpendiculaire coupe A B, eſt à égale diſtance de A & de D; donc A O = O D: ainſi l'angle A = l'angle O D A; mais (par la conſtruction) le triangle A D B eſt auſſi iſoſcèle: ainſi l'angle A = l'Angle B; les deux triangles A O D, A D B, ayant deux angles égaux, chacun à chacun, ſont donc équiangles (n°. 285.); par conſéquent (n°. 283.) les côtés oppoſés aux angles égaux ſont proportionnels; donc l'on a cette proportion, A B. A D :: A D. A O, d'où l'on tire $\overline{AD} = AB \times AO$. 2°. Il eſt auſſi très-facile de reconnoître que les triangles C A B, C O B ſont des triangles ſemblables: car, 1°. ils ont l'angle B commun. 2°. L'angle O C B = 54 degrés, puiſqu'il eſt égal à l'angle A C B moins l'angle A C S, c'eſt-à-dire, à 72 degrés — 18 degrés = 54 degrés; pareillement l'angle C A B = 54 degrés: car l'angle A C B au centre = 72 degrés; reſte donc 108 degrés pour les deux angles A, B. Ces deux angles ſont égaux; ils ont donc chacun 54 degrés; par conſéquent l'angle C A B eſt de 54 degrés, auſſi-bien que l'angle O C B; donc (n°. 285.) les triangles C A B, C O B ſont équiangles, & par conſéquent (n°. 283.) ils ont leurs côtés proportionnels; donc A B. C B

:: $\overline{CB}$ . $\overline{OB}$; ainſi $\overline{AB} \times \overline{OB} = \overline{CB}^2$ : mais nous avons déjà trouvé que $\overline{AB} \times \overline{OA} = \overline{AD}^2$; par conſéquent $\overline{AB} \times \overline{AO} + \overline{OB} = \overline{CB}^2 + \overline{AD}^2$; or $\overline{AO} + \overline{OB} = \overline{AB}$; donc enfin $\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AD}^2$, ce qui ſignifie que le quarré du côté du Pentagone eſt égal à la ſomme des quarrés faits ſur le côté du Décagone & ſur celui de l'Héxagone, inſcriptibles au même cercle.

On n'a pas abſolument beſoin de cette dernière conſtruction, pour avoir le côté du Pentagone, puiſque ce côté ſe trouve, en doublant l'arc dont le côté du Décagone eſt ſoustendant; on peut donc la paſſer ſans aucun inconvénient, ſi ce n'eſt que l'on ſe prive par-là d'une conſtruction très-élégante.

## PROBLÊME.

313. Trouver une moyenne proportionnelle Arithmétique entre les deux lignes A B, B C (*fig.* 92).

## RÉSOLUTION.

Mettez ces deux lignes l'une à la ſuite de l'autre ſur une même ligne A C; coupez cette ligne en deux parties égales au point D: l'une de ces deux moitiés ſera la moyenne Arithmétique proportionnelle entre les lignes données A B, B C.

## DÉMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que la moyenne proportionnelle Arithmétique eſt la moitié de la ſomme des deux lignes A B, B C. Soit appellée $x$ la ligne cherchée : on aura A B . $x$ : $x$ . B C; donc (n°. 263.) $AB + BC = 2x$; par conſéquent

$x = \frac{AB+BC}{2}$, c'eſt-à-dire, que la moyenne proportionnelle Arithmétique entre deux lignes eſt égale à la moitié de la ſomme de ces deux lignes; C. Q. F. D.

## PROBLÊME.

314. Avec la ligne MS faire un parallélogramme égal en ſurface au Parallélogramme ABDC (*fig.* 93.).

## RÉSOLUTION.

On voit qu'il s'agit de trouver une ligne, dont la longueur multipliée par MS, donne un produit égal à celui de la baſe CD par la perpendiculaire AO, que l'on abbaiſſera d'un angle quelconque ſur le côté oppoſé, en cas que le Parallélogramme donné ne ſoit pas rectangle. Nommons X cette ligne inconnue : par la condition du Problême nous aurons $MS \times X = CD \times AO$ (n°. 165.); donc (n°. 245.) MS. CD :: AO. X, où l'on voit que la ligne qui réſout le Problême, eſt une quatrième proportionnelle aux trois lignes données MS, CD, AO.

Cherchez donc cette quatrième proportionnelle MX (n°. 307.), & faites-en le rectangle MXPS avec la ligne donnée MS; ce rectangle aura la même ſurface que le Parallélogramme donné : car (par la conſtruction) MS. CD :: AO, MX; donc $MS \times MX = CD \times AO$.

## PROBLÊME.

315. Transformer en quarré le rectangle MXPS (*fig.* 93.), c'eſt-à-dire, trouver un quarré, dont la ſurface ſoit égale à celle de ce rectangle,

## RÉSOLUTION.

Soit Y Y le quarré inconnu. Par la condition du Problême Y Y = M X × M S; donc (n°. 246.) M X . Y : : Y . M S; il faut donc chercher une moyenne proportionnelle C D entre la hauteur M X & la baſe M S du rectangle propoſé (n°. 309), & faire avec cette ligne le quarré C D O S (*fig.* 94) : il ſera égal en ſurface au rectangle M X P S : car, par la conſtruction, M X . C D : : C D . M S; donc M X × M S = $\overline{CD}^2$; C. Q. F. D.

### *REMARQUE.*

316. Obſervons ici que plus les figures approchent d'être régulières, c'eſt-à-dire, moins leurs côtés diffèrent les uns des autres, moins auſſi ils ont de circuit par rapport à l'aire ou à la ſurface que renferment ces côtés. Prenez un terrein rectangulaire ou un parallélogramme rectangle, dont la baſe = 18 toiſes & la hauteur 2 toiſes; la ſurface de ce terrein ſera de 36 toiſes quarrées, & ſon circuit 40 toiſes courantes. Prenons un autre rectangle, dont les côtés diffèrent un peu moins; que ſa baſe, par exemple, ait 12 toiſes & ſa hauteur 3 : la ſurface de ce rectangle ſera égale au précédent, puiſque 3 × 12 = 36; mais ſon circuit n'aura que 30 toiſes courantes; & ſi l'on avoit ſuppoſé la baſe de ce rectangle = 9 toiſes & ſa hauteur = 4, ſa ſurface auroit encore été de 36 toiſes quarrées, & ſon circuit de 26 toiſes courantes ſeulement : enfin plus les côtés de cette figure tendront à l'égalité, en y ſuppoſant toujours la même ſurface, moins le circuit ſera grand; enſorte que le circuit de cette figure ſera le plus petit poſſible, lorſque

la baſe ſera égale à la hauteur : effectivement la baſe étant de 6 toiſes comme la hauteur, on aura toujours pour la ſurface 36 toiſes quarrées ; mais le circuit ſera réduit à 24 toiſes courantes, & ne pourra plus diminuer.

Cette obſervation peut être de quelque utilité, lorſque l'on fait conſtruire des bâtimens deſtinés à ſervir de magaſins : car, à ſurface égale, plus la figure de ces bâtimens ſera régulière, moins il y faudra de muraille ; ce qui eſt quelquefois d'une très-grande conſidération.

C'eſt une choſe remarquable, que les Abeilles ſe conduiſent exactement ſur ce principe dans la conſtruction de leurs *Alvéoles* : on appelle ainſi les petites cellules où ces Mouches dépoſent leur miel. Elles les conſtruiſent en Héxagones tous égaux & parfaitement réguliers. On a déja vu (n°. 147. Tom. I.) qu'il n'y a que trois ſortes de Polygones réguliers, dont on puiſſe faire uſage pour carreler les appartemens, quand on veut n'employer à cette opération que des carreaux d'une même eſpèce : il faut abſolument que ce ſoient ou des triangles équilatéraux, ou des quarrés, ou des Héxagones.

Entre la multitude infinie de Polygones qui pouvoient ſe préſenter à l'induſtrie des Abeilles, les ſeuls réguliers ont eû droit à leur ſageſſe, & les Héxagones à leur économie. Car, à circuit égal, c'eſt-à-dire, avec le même travail & la même dépenſe, on renferme plus de terrein dans un Héxagone régulier que dans un triangle équilatéral, ou que dans un quarré. Ainſi les Abeilles *géométriſent* dans leurs conſtructions ; c'eſt un fait que dépoſent unanimement toutes les ruches ; & la Géométrie va mettre le comble à la certitude de leur témoignage.

## DÉMONSTRATION.

Suppoſons donc que le triangle équilatéral M (*PL.* 21.), le quarré R, & l'héxagone régulier T aient le même circuit; que chacun, par exemple, ait 36 pieds de tour : je dis que le triangle renferme moins d'eſpace que le quarré, & le quarré moins que l'héxagone.

Cherchons d'abord la ſurface du triangle M : ſon circuit étant 36 (ſuppoſition), ſa baſe BC = 12, dont la moitié BD = 6. Pour avoir la hauteur AD de ce triangle, remarquons, à cauſe de l'angle droit en D, que le quarré de l'hypothénuſe $\overline{AB} = \overline{BD} + \overline{AD}$; donc $\overline{AB} - \overline{BD} = \overline{AD}$; & comme AB = 12, & BD = 6, $\overline{AB}$ ſera = 12 × 12 = 144, & $\overline{BD}$ = 6 × 6 = 36; ainſi l'équation $\overline{AB} - \overline{BD} = \overline{AD}$ deviendra 144 — 36 = $\overline{AD}$ = 108; par conſéquent, en extrayant la racine quarrée, AD = $\sqrt{108}$, laquelle vaut plus de 10, & ne vaut pas 11. Si on multiplie donc la moitié de la baſe BD = 6 par 11, le produit 66 ſera une aire plus grande que celle du triangle M. Or le côté du quarré R étant = 9, ſa ſurface ſera = 9 × 9 = 81, beaucoup plus grande que 66. Il eſt donc démontré que le quarré R eſt plus grand que le triangle M.

Faiſons voir préſentement que l'héxagone T > R, ou > 81. On ſçait que le rayon OS = le côté SR de l'héxagone. Tout le circuit étant 36, OS ou SR = 6, & SP = 3. L'angle en P eſt

droit; donc le quarré de l'hypothénuſe $\overline{OS}^2 = \overline{SP}^2 + \overline{OP}^2$, ou $\overline{OS}^2 - \overline{SP}^2 = \overline{OP}^2$; c'eſt-à-dire, $36 - 9 = \overline{OP}^2 = 27$. Ainſi la hauteur $OP = \sqrt{27}$, laquelle eſt plus grande que 5. En multipliant donc SP par OP, ou 3 par $\sqrt{27}$, pour avoir l'aire du triangle ORS, on aura un produit plus grand que $3 \times 5 = 15$. Il faut prendre ſix fois le triangle OSR pour avoir l'aire de l'héxagone; ainſi $15 \times 6$ ſont moindres que cette aire. Or $15 \times 6 = 90 > 81$, que l'on a trouvé pour la ſurface du quarré R; à plus forte raiſon l'eſpace renfermé dans l'héxagone eſt plus grand que celui du quarré; C. Q. F. D.

I. La démonſtration ſeroit imparfaite, ſi on en bornoit l'application à un cas particulier. Rendons-la générale; & pour cela ſoit chacun des circuits des figures propoſées $= c$; chaque côté BC du triangle équilatéral M eſt le tiers de ſon contour, c'eſt-à-dire, $BC = \frac{c}{3}$, & BD, moitié de BC, en eſt le ſixième; ainſi $BD = \frac{c}{6}$: mais on ſçait que le quarré de l'hypothénuſe $\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$; donc $\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2$; par conſéquent, puiſque $AB = \frac{c}{3}$, $\overline{AB}^2 = \frac{c^2}{9}$, & $\overline{BD}^2 = \frac{c^2}{36}$; l'équation précédente devient donc $\frac{c^2}{9} - \frac{c^2}{36} = \overline{AD}^2 = \frac{4c^2}{36} - \frac{c^2}{36} = \frac{3c^2}{36} = \frac{c^2}{12}$;

ainſi la hauteur $AD = \sqrt{\frac{c^2}{12}}$ & l'aire du triangle $M = BD \times AD = \frac{c}{6} \times \sqrt{\frac{c^2}{12}}$.

II. Dans le quarré R, chaque côté $GL = \frac{c}{4}$; donc $R = \frac{c}{4} \times \frac{c}{4} = \frac{c^2}{16}$. Or je dis que l'aire $\frac{c}{6} \times \sqrt{\frac{c^2}{12}}$ du triangle M, eſt plus petite que $\frac{c^2}{16}$, qui eſt celle du quarré.

Car de deux grandeurs que l'on compare, celle-là eſt la plus petite dont le quarré eſt le plus petit. Le quarré de l'aire $\frac{c}{6} \times \sqrt{\frac{c^2}{12}}$ du triangle M eſt $\frac{c^2}{36} \times \frac{c^2}{12}$; puiſqu'une quantité affectée d'un radical, s'élève à ſon quarré par cela ſeul qu'on en fait évanouir le radical, dont l'expoſant eſt 2 (n°. 93. Alg.). En achevant la multiplication, le quarré de l'aire du triangle M devient $= \frac{c^4}{432}$; mais en quarrant $\frac{c^2}{16}$, qui eſt l'aire du quarré R, on trouve $\frac{c^2}{16} \times \frac{c^2}{16} = \frac{c^4}{256}$. Or il eſt tout-à-fait évident que $\frac{c^4}{432} < \frac{c^4}{256}$; puiſqu'une fraction eſt d'autant plus petite que ſon dénominateur eſt plus grand, le numérateur reſtant le même. Le triangle équilatéral eſt donc plus petit que le quarré de même circuit.

III. Recherchons préſentement la ſurface de l'Héxagone régulier T. Son circuit étant $= c$ (ſupp.), ſon côté $SR = OS$ (n°. 119. *Tom.* 1.) $= \frac{c}{6}$, & $SP = \frac{c}{12}$; donc $\overline{OS}^2 = \frac{c^2}{36}$, & $\overline{SP}^2 = \frac{c^2}{144}$.

Or, comme on l'a vu ci-deſſus, $\overline{OS}^2 = \overline{SP}^2 + \overline{OP}^2$, ou $\overline{OS}^2 - \overline{SP}^2 = \overline{OP}^2$ (en ſubſtituant les nombres) $= \frac{c^2}{36} - \frac{c^2}{144} = \frac{4c^2}{144} - \frac{c^2}{144} = \frac{3c^2}{144} = \frac{c^2}{48}$, donc la hauteur $OP = \sqrt{\frac{c^2}{48}}$. On a l'aire d'un Polygone régulier, en multipliant la moitié de ſon contour par la perpendiculaire abbaiſſée du centre ſur l'un de ſes côtés; ainſi l'aire de l'Héxagone $T = \frac{c}{2} \times \sqrt{\frac{c^2}{48}}$. On a vu (art. II.) que l'aire du quarré $R = \frac{c^2}{16}$. Ainſi il faut démontrer que $\frac{c}{2} \times \sqrt{\frac{c^2}{48}} > \frac{c^2}{16}$. Or cette Démonſtration ſera complete, ſi l'on fait voir que le quarré de la première de ces deux quantités eſt plus grand que celui de la ſeconde. Le quarré de $\frac{c}{2} \times \sqrt{\frac{c^2}{48}}$ eſt $\frac{c^2}{4} \times \frac{c^2}{48}$ (art. II.) $= \frac{c^4}{192}$, & le quarré de $\frac{c^2}{16} = \frac{c^4}{256}$; mais il eſt évident que $\frac{c^4}{192} > \frac{c^4}{252}$; l'Héxagone eſt donc auſſi plus grand que le quarré de même circuit; & c'eſt tout C. Q. F. D. (*a*).

Si des cercles diſpoſés autour d'un point n'y laiſſoient pas des vuides, comme on le voit (*fig. L.*

(*a*) Comme les quantités qui ſe trouvent ſous le ſigne radical dans le calcul précédent, n'ont point une racine quarrée que l'on puiſſe apprécier à toute rigueur, j'ai pris le parti de faire évanouir ces radicaux; ce qui m'a conduit à une Démonſtration fort ſimple, fondée ſur un principe qui ne l'eſt pas moins. Voilà pourquoi des Propoſitions, que l'on démontre en deux mots à des perſonnes un peu inſtruites, exigent de longs circuits pour être entendues de celles qui ne le ſont pas aſſez. Les premiers pas, que l'on fait dans l'application de la Géométrie aux beſoins de la ſociété, conduiſent donc au calcul des radicaux. On le trouvera très-ſimplement expliqué & démontré au commencement de mon *Traité des Courbes ou des Sections Coniques appliquées aux Arts*, enrichi de Diſſertations hiſtoriques & critiques ſur l'origine des découvertes qui ſont l'objet de ce Traité.

PL. 7), il paroît que les abeilles n'auroient pas manqué d'en faire uſage pour la conſtruction de leurs alvéoles; puiſque de toutes les figures régulières de même circuit, le cercle eſt celle qui renferme un plus grand eſpace.

## DÉMONSTRATION.

IV. Elle ſe réduit ici à faire voir que le cercle eſt plus grand que l'hexagone régulier. Rappellons-nous que, ſuivant Archimède, le diamètre d'un cercle étant 7, ſa circonférence n'eſt pas tout-à-fait 22; & qu'ainſi en ſuppoſant la circonférence $= 22$, le diamètre eſt un peu plus de 7: car à une plus grande circonférence répond un plus grand diamètre. Nous le prendrons néanmoins ſur le pied de 7; & l'aire du cercle qui en réſultera ſera évidemment plus petite que la véritable. Or, ſi l'on démontre que cette aire eſt plus grande que celle de l'héxagone, il faudra convenir, à plus forte raiſon, que le cercle eſt auſſi plus grand.

Soit donc la circonférence de ce cercle $= c$, ainſi qu'on l'a ſuppoſé pour le circuit des autres polygones réguliers: on aura ſon diamètre $d$ (art. IV.) en faiſant $22 . 7 :: c . d = \frac{7c}{22}$; donc le quart de ce diamètre ou la moitié du rayon eſt $\frac{7c}{22}$ diviſé par 4, laquelle $= \frac{7c}{88}$. On ſçait qu'on a l'aire d'un cercle en multipliant ſa circonférence $c$ par la moitié de ſon rayon $\frac{7c}{88}$; par conſéquent l'aire du cercle $= \frac{7c^2}{88}$, dont le quarré $= \frac{49c^4}{88 \times 88} = \frac{49c^4}{44 \times 2 \times 88}$. Or on a vû (art. III.) que le quarré de l'aire de l'héxagone $= \frac{c^4}{192}$. Ainſi, en démontrant que $\frac{49c^4}{44 \times 2 \times 88} > \frac{c^4}{192}$, il ſera clair que le cercle eſt

aussi plus grand que l'héxagone de même circuit. Observons donc que $\frac{49c^4}{44\times2\times88} = \frac{44c^4}{44\times2\times88} + \frac{5c^4}{44\times2\times88}$; mais $\frac{44c^4}{44\times2\times88}$, (qui n'est qu'une partie du quarré de l'aire du cercle) $= \frac{c^4}{2\times88} = \frac{c^4}{176}$, quantité visiblement plus grande que le quarré $\frac{c^4}{192}$ de la surface de l'héxagone; car de deux fractions, qui ont le même numérateur, celle-là est la plus grande qui a le plus petit dénominateur ou le plus petit diviseur. Concluons-donc, sans en dire davantage, que l'aire d'un cercle est plus grande que celle d'un héxagone régulier de même circuit.

Mais est-elle plus grande que celle de tout polygone régulier de même circuit? Le nombre des côtés du polygone, comparé au cercle, fût-il plus grand qu'aucun nombre donné, son aire sera toujours plus petite que le cercle; & c'est-là une espèce de Paradoxe géométrique : car le rayon de ce polygone sera toujours plus grand que celui du cercle. Il n'y a, pour s'en convaincre, qu'à considérer le cercle X (*PL.* 21.) & le polygone quelconque T de même circuit; le cercle décrit du centre O, avec le rayon OS, sera évidemment circonscrit à cette figure, que l'on suppose régulière. Ainsi la circonférence de ce cercle circonscrit sera plus grande que le périmètre du polygone inscrit. Or (supp.) ce périmètre = la circonférence du cercle X; par conséquent la circonférence du cercle, circonscrit au polygone T, sera plus grande que celle du cercle X; donc le rayon OS de la première sera plus grand que le rayon MG de la seconde.

Il y a plus : le polygone T, quoique plus petit, comme on le verra bientôt, que le cercle X de même

même contour, ne ſçauroit être inſcrit à ce cercle : autrement, le périmètre contenu ſeroit égal au contenant ; ce qui eſt abſurde.

Néanmoins l'aire du Polygone régulier quelconque T eſt plus petite que le cercle X de même circuit.

## DÉMONSTRATION.

Soit $= c$ le circuit de l'une & de l'autre figure ; le rayon de $X = r$ : ſoit auſſi $= h$ la perpendiculaire O P, abbaiſſée du centre O ſur l'un des côtés quelconque S R du Polygone T. On ſçait que, pour avoir l'aire de T, il faut multiplier la moitié de ſon circuit $c$ par la perpendiculaire $h$ ; ce qui donne $T = \frac{ch}{2}$ ; or le cercle $X = \frac{cr}{2}$ ; ainſi $T . X :: \frac{ch}{2} . \frac{cr}{2}$ ; & en diviſant les deux derniers termes de cette proportion par $\frac{c}{2}$, on trouve $T . X :: h . r$. Si l'on démontre donc que $h < r$, il ſera clair que $T < X$.

Il faut abſolument que $h$ ſoit égale à $r$, ou plus grande ou plus petite ; mais les deux premiers cas ſont impoſſibles. Car, en décrivant un cercle du centre O avec $OP = h$, ce cercle ſeroit inſcrit au Polygone T ; ſa circonférence ſeroit par conſéquent plus petite que le circuit de ce Polygone : cependant, ſi l'on ſuppoſoit $h = r$, la circonférence inſcrite à T égaleroit la circonférence de X, puiſque des rayons égaux donnent des circonférences égales ; or (ſupp.) la circonférence de $X =$ le contour de T ; donc la circonférence inſcrite à T égaleroit auſſi le circuit de ce Polygone ; ce qui eſt impoſſible.

On voit de même que $h$ ne ſçauroit être plus grande que $r$ ; autrement la circonférence décrite

avec $h$ du centre O, ſeroit en même tems inſcrite au Polygone T, & plus grande que le périmètre de ce Polygone : puiſqu'elle ſeroit plus grande que celle du cercle X, qui eſt égale à ce périmètre. Ainſi la perpendiculaire $h$ ne pouvant être égale au rayon $r$, ni plus grande, c'eſt une néceſſité qu'elle ſoit plus petite.

Reprenant donc la proportion T . X :: $h$ . $r$; puiſque $h \prec r$, on aura auſſi T $\prec$ X; C. Q. F. D.*

On voit par-là combien eſt grande l'erreur de ceux qui eſtiment la grandeur des Villes ou des terreins par leur circuit. Il y a des circonſtances où un terrein pourroit contenir deux, trois, quatre fois, &c. moins qu'un autre, & cependant avoir quatre fois, cinq fois, &c. plus de circuit; le calcul en eſt trop aiſé, nous ne nous y arrêterons pas plus long-tems.

## PROBLÊME.

317. Quarrer un Triangle, ou déterminer le quarré dont la ſurface ſoit préciſément égale à celle du Triangle A B C. (*fig.* 95.)

## RÉSOLUTION.

D'un angle quelconque B abbaiſſons une perpendiculaire B D ſur le côté oppoſé A C, pour déterminer la baſe & la hauteur de ce triangle; & nommons Y le côté du quarré inconnu. Suivant la

* Cette derniere Démonſtration étant abſolument générale, puiſqu'on ne l'a appliquée à aucun Polygone en particulier, j'aurois pu me diſpenſer de la comparaiſon de l'Hexagone au cercle, que j'ai faite ci-deſſus; mais j'ai été bien-aiſe de faire voir qu'une Démonſtration, qui s'applique à tous les cas, eſt quelquefois plus ſimple & plus aiſée, que celle où il ne s'agiroit que d'un cas déterminé, ainſi que l'on peut s'en convaincre ici, en comparant cette derniere Démonſtration à la précédente. Celle-ci a même un autre avantage; c'eſt qu'elle eſt totalement indépendante du rapport vrai ou approché de la circonférence d'un cercle à ſon diamètre.

condition du Problême, nous aurons $YY = \frac{AC}{2} \times BD$. D'où l'on tiré cette proportion, $\frac{AC}{2} . Y :: Y . BD$; ce qui nous montre que le côté du quarré inconnu eſt une moyenne proportionnelle entre la moitié de la baſe & la hauteur du triangle propoſé.

Cherchons donc (n°. 309.) une moyenne proportionnelle OS entre la moitié de la baſe AC & la hauteur BD du triangle ABC. Sur cette ligne OS faiſons le quarré OSBD; il ſera égal en ſurface au Triangle ABC.

## DÉMONSTRATION.

Par la conſtruction, $\frac{AC}{2} . OS :: OS . BD$; donc $\overline{OS}^2 = \frac{AC}{2} \times BD$; c'eſt-à-dire, que le quarré fait ſur OS eſt égal au produit de la moitié de la baſe AC par la hauteur BD. Or ce produit exprime la ſurface du Triangle ABC. (n°. 177.) Donc, &c. Une moyenne proportionnelle entre la baſe entière & la moitié de la hauteur, auroit auſſi déterminé le quarré cherché.

## PROBLÊME.

318. Faire que deux ou pluſieurs parallélogrammes donnés aient la même hauteur, ſans changer de ſurface.

Voulez-vous que le grand Parallélogramme ABDS ſoit de même hauteur MP que le petit Parallélogramme BCFM? (*fig.* 96.)

## RÉSOLUTION.

Il eſt clair qu'il faut transformer le grand Parallélogramme ABDS en un autre de même ſur-

face, mais dont la hauteur = MP. Reſte donc à trouver la baſe de ce Parallélogramme inconnu. Appellons X cette baſe, & abbaiſſons la perpendiculaire ST. Suivant la condition du Problême, AB × ST = MP × X ; donc MP. ST :: AB . X, où l'on voit que la baſe cherchée eſt une quatrième proportionnelle aux trois lignes données MP, ST, AB : ainſi ( n°. 307. ) on déterminera cette quatrième proportionnelle LN, qui ſervira de baſe au Parallélogramme LNHR, auquel on donnera la hauteur RL = MP. Ce Parallélogramme ſera égal en ſurface au Parallélogramme BCFM, ainſi qu'on le demandoit.

## DÉMONSTRATION.

La conſtruction donne MP . ST :: AB . LN. Donc LN × MP = AB × ST ; mais ( conſt. ) MP = LR : ainſi LN × LR = AB × ST. C'eſt à-dire, que le Parallélogramme LNHR eſt égal a 1 Parallélogramme ABDS, en même tems qu'il a une hauteur égale à celle du petit Parallélogramme BCFM ; & c'eſt tout ce que l'on demandoit.

### *COROLLAIRE I.*

319. Il eſt aiſé préſentement de faire un ſeul Parallélogramme des deux Parallélogrammes ABDS, BCFM : on ajoutera ( *fig.* 96. ) la baſe BC du petit Parallélogramme à celle du Parallélogramme LNHR ; c'eſt-à-dire, que l'on fera le prolongement LO = BC, & achevant le Parallélogramme ONHG, il ſera égal aux deux Parallélogrammes ABDS, BCFM ; ce qui eſt aſſez évident.

Par conſéquent, en réduiſant à la même hauteur tel nombre de Parallélogrammes que l'on voudra, on

en pourra toujours faire un ſeul Parallélogramme.

Il n'eſt pas beſoin d'avertir que l'on auroit la même choſe, ſi on les réduiſoit tous à la même baſe; on feroit alors la ſomme de toutes les hauteurs de la même manière que l'on a pris la ſomme des baſes, &c.

## *COROLLAIRE II.*

320. Et comme l'on peut (n°. 315.) transformer un Rectangle quelconque en quarré, il eſt clair que l'on peut auſſi trouver un ſeul quarré égal en ſurface à tel nombre de Parallélogrammes que l'on voudra ſuppoſer.

## PROBLÊME.

320. Trouver un ſeul triangle égal à pluſieurs triangles donnés ABC, OGS. (*fig.* 97.) On voit qu'il ſuffit d'en ſçavoir réduire deux à un ſeul.

## RÉSOLUTION.

Transformons OGS l'un des deux triangles en un autre de même ſurface, mais dont la hauteur ſoit égale à celle du triangle ABC.

Puiſque la hauteur AH du triangle inconnu eſt donnée, il ne s'agit plus que de trouver ſa baſe que j'appelle X. Or la condition du Problême eſt que $\frac{AH \times X}{2} = \frac{GS \times OT}{2}$. Donc $AH \times X = GS \times OT$: ainſi AH. OT :: GS. X; la baſe cherchée eſt donc une quatrième proportionnelle aux deux hauteurs AH, OT, & à la baſe GS. On trouvera cette quatrième proportionnelle PR (par le n°. 307.) : on en fera la baſe d'un triangle PRH, auquel on donnera pour hauteur PH = AH, & le triangle PRH, de même hauteur que le triangle ABC, aura une ſurface égale à celle du triangle OGS.

Puis donc que les deux triangles A B C, P R H ſont de même hauteur, ajoutez la baſe B C = P M de l'un, à la baſe P R de l'autre, & tirez H M; il eſt évident que le triangle M H R eſt égal à la ſomme des deux triangles propoſés A B C, O G S; puiſque le triangle M R H renferme deux triangles qui ſont égaux aux deux triangles A B C, O G S.

## *COROLLAIRE III.*

322. Mais on a donné (n°. 317.) le moyen de quarrer un triangle; & par conſéquent on peut trouver un ſeul quarré égal à tel nombre de triangles que l'on voudra, après avoir réduit tous les triangles en un ſeul. Enfin toute figure, terminée par des lignes droites, ſe réſout en triangles; il n'y a donc point de figures rectilignes, dont on ne puiſſe avoir la quadrature.

## PROBLÊME.

323. Transformer un Trapèſe A B C D, dont les deux côtés A B, D C ſont parallèles, en un Parallélogramme qui lui ſoit égal en ſurface. (*fig.* 98.)

## RÉSOLUTION.

Cherchez une moyenne proportionnelle Arithmétique (n°. 312.) entre la baſe D C ſupérieure & la baſe A B inférieure de ce Trapèſe, c'eſt à-dire, coupez en deux parties égales la ſomme des baſes A B, D C, & ſur l'une de ces moitiés A S, faites le Rectangle A S P D, dont la hauteur A D ſoit égale à la hauteur D O du Trapèſe; je dis que le Rectangle A S P D eſt égal en ſurface au Trapèſe A B C D.

## DÉMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que le Trapèſe A B C D eſt

égal à un Parallélogramme de même hauteur, dont la baſe eſt moyenne proportionnelle Arithmétique entre les baſes AB, DC de ce Trapèſe.

On ſait (n°. 313.) que cette moyenne proportionnelle Arithmétique eſt égale à la moitié de la ſomme AM des deux baſes AB, DC du Trapèſe. Soit donc AS égale à cette moitié, & par le point S menons SP parallèle au côté AD; en prolongeant CD, nous aurons le Parallélogramme ASPD de même hauteur que le Trapèſe, & dont la baſe AS ſera une moyenne proportionnelle Arithmétique entre les baſes parallèles AB, DC de ce Trapèſe; il s'agit donc de démontrer que le Parallélogramme ASPD eſt égal au Trapèſe ABCD.

Premièrement, ces deux figures ont la partie commune ASXCD; reſte à prouver que l'autre partie CXP = l'autre partie BXS. Remarquez donc que (par la conſt.) DC + CP = AS = SM = SB + MB; ainſi DC + CP = SB + BM. Or BM = DC; (puiſque AM eſt la ſomme des deux baſes AB, DC) donc CP = BS: de plus, à cauſe des parallèles DP, AB, les angles *a*, *d* alternes internes ſont égaux; les angles B, C le ſont auſſi: ainſi les deux triangles CXP, BXS, ayant un côté égal, & ſur ce côté des angles égaux, chacun à chacun, ſont parfaitement égaux en ſurface; (n°. 85.) & c'eſt tout ce qui reſtoit à prouver.

## *COROLLAIRE I.*

324. Il eſt donc facile d'évaluer un Trapèſe. Suppoſons que la baſe AB = 14 toiſes, DC = 6 toiſes, & la hauteur DO = 10: faites la ſomme 14 + 6 = 20 des deux baſes AB, BC. Prenez-en la moitié 10: multipliez cette moitié 10 par la hauteur OD = 10; le produit, 100 toi-

ſes quarrées, ſera la valeur du Trapèſe ABCD.

## *COROLLAIRE II.*

Puiſque CP = BS, on aura CX = XB. Remarquez donc que la ligne X*t*, menée par le milieu des deux côtés CB, DA, eſt égale à la moyenne proportionnelle Arithmétique entre les deux côtés AB, DC parallèles. (*fig.* 98.)

## PROBLÊME.

325. Quarrer un cercle, c'eſt à-dire, trouver un quarré dont la ſurface ſoit égale à celle d'un cercle propoſé.

## RÉSOLUTION.

Juſqu'à préſent ce Problême n'a point été réſolu à la rigueur; il eſt devenu fameux ſous le nom de la *Quadrature du Cercle :* on l'a tentée de bien des façons ſans aucun ſuccès; mais au fond une réſolution exacte de ce Problême ſeroit beaucoup plus curieuſe qu'utile : car, pour nos beſoins, on a la meſure du cercle auſſi préciſe qu'il eſt néceſſaire.

Suppoſons que le cercle O (*fig.* 99.) ſoit la baſe d'une colonne. Enveloppez ſa circonférence MCS avec une meſure pliante : remettez en ligne droite la partie qui s'eſt appliquée à la circonférence : prenez OM égale à cette meſure rectifiée, pour ſervir de baſe à un triangle MOS dont la hauteur = OS, rayon du cercle propoſé. Il a été démontré (n°. 202.) que ce triangle eſt égal au cercle, en cas que la baſe OM ſoit au juſte la longueur de la circonférence CSM : or il eſt facile de quarrer le triangle OMS, puiſque (n°. 317.) il n'y a qu'à chercher une moyenne proportionnelle entre la moitié de la baſe OM & la hauteur OS : cette moyenne proportionnelle ſera le côté du

quarré égal en ſurface au triangle OMS, & par conſéquent au cercle propoſé. En un mot, on a l'aire d'un cercle, en multipliant la moitié de la circonférence par le rayon.

## PROBLÊME.

326. Trouver un quarré égal à tant de quarrés que l'on voudra (*fig.* 100.).

## RÉSOLUTION.

Suppoſons que l'on demande un quarré qui ſoit égal aux trois quarrés A, B, C. Commençons par trouver une ligne qui ſoit le côté d'un quarré égal aux deux quarrés A, B. Pour cela, avec les deux côtés MF, FD des deux quarrés A, B, faites le triangle rectangle MFD : il eſt certain que le quarré fait ſur l'hypothénuſe MD, ſera égal à la ſomme des quarrés faits ſur les deux autres côtés DF, FM, c'eſt-à-dire, à la ſomme des quarrés A, B (n°. 293.). Après cela, ſur une des extrémités M de l'hypothénuſe MD, élevons perpendiculairement le côté MS du petit quarré C, & tirons l'hypothénuſe DS; cette ligne DS ſera le côté d'un quarré égal à la ſomme des trois quarrés A, B, C.

## DÉMONSTRATION.

Le triangle DMS étant rectangle, le quarré fait ſur l'hypothénuſe DS eſt égal à la ſomme des quarrés faits ſur les deux autres côtés MD, MS; (n°. 293.) ainſi $\overline{DS}^2 = \overline{MD}^2 + \overline{MS}^2$ : mais MD étant l'hypothénuſe du triangle rectangle DFM, on aura auſſi $\overline{MD}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{FM}^2$; par conſéquent $\overline{DS}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{FM}^2 + \overline{MS}^2 =$ les

trois quarrés A + B + C; C. Q. F. D.

Si l'on avoit eu un quatrième quarré, on en auroit élevé le côté à angles droits au point S de l'hypothénuse D S, & la nouvelle hypothénuse, qui en seroit venue, auroit été le côté du quarré égal aux quatre quarrés proposés, & ainsi de suite.

## PROBLÊME.

327. Trouver un cercle égal à la somme des cercles P, S, ou égal à tant de cercles que l'on voudra. (*fig.* 101.)

## RÉSOLUTION.

Elle est la même que celle du Problême précédent. Construisez donc un triangle rectangle A B D, dont les côtés A B, B D soient les diamètres des cercles P, S donnés. Je dis que l'hypothénuse D A est le diamètre d'un cercle Y égal aux deux cercles P, S, ou, ce qui est la même chose, que le demi-cercle fait sur l'hypothénuse A D, est égal aux deux demi-cercles faits sur les deux diametres A B, B D.

## DÉMONSTRATION.

Il faut se rappeller le n°. 306. où il a été démontré que les surfaces des cercles sont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diamètres; par conséquent Y . S :: $\overline{AD}^2$ . $\overline{AB}^2$. De même l'on a cette autre proportion, Y . P :: $\overline{AD}^2$. $\overline{BD}^2$. Ainsi (n°. 255.) ajoutant par ordre, on aura 2 Y . S + P :: 2 $\overline{AD}^2$ . $\overline{BD}^2$ + $\overline{AB}^2$. Et en divisant par 2 les antécédens (n°. 252.) on

$Y : S + P :: \overline{AD}^2 . \overline{BD}^2 + \overline{AB}^2$ : or (n°. 293.) $\overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AB}^2$; donc auſſi $Y = S + P$, c'eſt-à-dire, que le cercle Y, dont AD eſt le diamètre, vaut les deux cercles S, P; ainſi qu'il falloit le démontrer.

En peu de mots, les cercles ſont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres : or le quarré du diamètre du cercle Y vaut la ſomme des quarrés faits ſur les diamètres des cercles S, P; donc auſſi le cercle Y eſt égal aux deux cercles S, P.

Par ce moyen, vous pourrez trouver un cercle égal à tant de cercles que vous voudrez : mais cette conſtruction s'étend à toutes les figures ſemblables que l'on voudroit réduire en une ſeule de même ſurface; puiſque, généralement parlant, les figures ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

C'eſt pourquoi, ſi l'on avoit deux Pentagones ſemblables, qu'il fallût réduire en un ſeul, on mettroit à angle droit deux côtés homologues, afin d'avoir un triangle rectangle, dont l'hypothénuſe ſeroit le côté d'un pentagone ſemblable aux deux autres, & égal à leur ſomme.

## *COROLLAIRE.*

328. Quand le triangle rectangle DBA eſt iſoſcèle, ſi l'on conſtruit des demi-cercles ſur chaque côté, il en réſulte la quadrature d'une portion de cercle. (*fig.* 102.)

## DÉMONSTRATION.

Le demi-cercle fait ſur l'hypothénuſe DA eſt égal aux deux demi-cercles égaux faits ſur les deux autres côtés : ainſi le demi-cercle de l'hypothénuſe

eſt double du demi-cercle fait ſur un côté DB; donc la moitié du demi cercle de l'hypothénuſe, c'eſt-à-dire, le quart de cercle BCDO, eſt égal au demi-cercle BSD: mais le quart de cercle BCDO, & le demi cercle BDS, ont le ſegment BDO commun; par conſéquent la partie BODS, en forme de croiſſant, eſt égale au triangle BCD. Or on a la quadrature du triangle; par conſéquent l'on a auſſi la quadrature de la portion de cercle BODS.

Cette portion de cercle quarrable eſt connue ſous le nom de *Lunule d'Hypocrate*, Inventeur de cette quadrature. Il n'y a rien de plus élégant dans toute la Géométrie élémentaire; mais c'eſt une ſpéculation qui n'a guères d'autre uſage que celui de plaire à l'eſprit.

Le *quarré de l'hypothénuſe*, dont Hyppocrate a fait uſage pour la quadrature de ſa Lunule, eſt auſſi fort propre à l'élévation d'une perpendiculaire ſur l'extrémité d'une ligne.

## PROBLÊME.

329. Elever une perpendiculaire ſur l'extrémité A d'une ligne AS, en faiſant uſage de la propriété du quarré de l'hypothénuſe. (*fig.* 103.)

## RÉSOLUTION.

Marquez cinq parties égales à volonté ſur la ligne donnée AS. Prenez avec le compas trois de ces parties, & du point A tracez un arc de cercle. Prenez enſuite cinq de ces parties, & mettant une des pointes du compas ſur le point 4, décrivez un autre arc qui coupe le premier en un point O. De ce point menez au point A la ligne OA; elle ſera perpendiculaire.

## DÉMONSTRATION.

Tirez la ligne O 4; ſi la ligne A O eſt perpendiculaire, le triangle O A 4 doit être rectangle; & par conſéquent le quarré de l'hypothénuſe O 4, doit être égal à la ſomme des quarrés faits ſur les deux autres côtés A O, A 4; or cela arrive véritablement: car (par la conſtruction) l'hypothénuſe étant 5, ſon quarré = 25, & la ſomme des quarrés des deux autres côtés eſt $9 + 16 = 25$, valeur du quarré de l'hypothénuſe. Le triangle eſt donc rectangle en A, & par conſéquent A O eſt une perpendiculaire; C. Q. F. D.

## PROBLÊME.

Deux cercles concentriques, ou qui ont le même centre, étant donnés, trouver le cercle auquel eſt égale la couronne circulaire, compriſe entre les deux circonférences de ces cercles. (*fig. G. PL. XI.*)

## RÉSOLUTION ANALYTIQUE.

Soit la circonférence du grand cercle = P; ſon rayon = R; ſon aire = $\frac{PR}{2}$; (n°. 202.) la circonférence du petit cercle = $p$; ſon rayon = $r$; ſon aire = $\frac{pr}{2}$. La couronne circulaire ou le cercle égal à cette couronne = O = $\frac{PR}{2} - \frac{pr}{2}$; étant évident que la couronne circulaire eſt égale à la différence du grand cercle au petit cercle. Menez le rayon C H. Vous aurez le triangle rectangle H D C, dont l'hypothénuſe C H eſt le rayon du grand cercle, & le côté C D le rayon du petit: mais (n°. 327.) le cercle décrit avec l'hypothénuſe C H vaut la ſomme des deux cer-

cles, dont l'un ſeroit conſtruit avec le côté CD, & l'autre avec le côté DH, dont le cercle ſoit appellé M : ainſi $\frac{PR}{2} = \frac{pr}{2} + M$, ou $\frac{PR}{2} - \frac{pr}{2} = M$; mais il eſt évident que $\frac{PR}{2} - \frac{pr}{2} = O$ : donc $M = O$; C. Q. F. D.

## PROBLÊME.

330. Réduire une figure quelconque ABCDFHL (*fig.* 104.) de grand en petit. C'eſt à-dire, trouver une autre figure ſemblable, plus petite, qui ait avec elle un rapport quelconque.

## RÉSOLUTION.

Prenons un cas particulier. Suppoſons qu'il s'agiſſe de réduire cette figure en une autre qui n'en ſoit que les $\frac{2}{5}$. Si donc on appelle la figure totale S, celle que l'on cherche doit être $\frac{2}{5}$ de S ou $\frac{2S}{5}$.

De l'angle A tirons des lignes qui diviſent la figure propoſée en triangles. Puiſque la figure que nous cherchons doit être ſemblable à celle ci, il eſt néceſſaire que les triangles dont elle ſera compoſée, ſoient ſemblables, chacun à chacun, à ceux de la figure propoſée, & que de plus chaque triangle ne ſoit que les $\frac{2}{5}$ de ſon correſpondant. Cherchons donc un triangle ſemblable à un des triangles ABC de la figure, & qui ne ſoit que les $\frac{2}{5}$ de ce triangle : nommons $a$ le côté AB connu, & ſoit appellé $x$ le côté homologue du triangle cherché.

Faites bien attention que les figures ſemblables doivent être entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues (n°. 306.) ; nous aurons donc cette proportion, qui va réſoudre le Problême : la figure donnée S eſt à la figure cherchée $\frac{2S}{5}$, comme le quarré $aa$ du côté AB eſt au quarré $xx$ du

côté homologue inconnu, ou ſimplement, $S . \frac{2S}{5} :: aa . xx$. Et (en multipliant les deux premiers termes par 5 pour faire évanouir la fraction) $5S . 2S :: aa . xx$. En les diviſant maintenant par S, on a $5 . 2 :: aa . xx$; donc $2aa = 5xx$; par conſéquent $xx = \frac{2aa}{5} = \frac{2a}{5} \times a$ : d'où l'on tire $\frac{2a}{5} . x :: x . a$. C'eſt-à-dire, que le côté $x$ homologue au côté AB eſt une moyenne proportionnelle entre le côté AB & la cinquième partie du double de ce côté : je porte donc cette moyenne proportionnelle ſur le côté AB de A en $b$, & je tire par $b$ la ligne $bc$ parallèle à BC ; enſuite par C la ligne $cd$ parallèle au côté correſpondant CD ; par $d$ la parallèle $df$, &c. comme on le voit dans la figure ; ce qui donne une figure $bcdfghl$ tout-à-fait ſemblable à la grande ; puiſqu'à cauſe du paralléliſme, tous les côtés de l'une ſont proportionnels à tous les côtés de l'autre. Reſte donc à démontrer qu'en conſéquence de la conſtruction, la petite figure n'eſt que les $\frac{2}{5}$ de la grande.

## DÉMONSTRATION.

Puiſque les figures ſemblables doivent être entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues, s'il eſt vrai que la petite figure ſoit les $\frac{2}{5}$ de la grande, il eſt auſſi néceſſaire que le quarré $xx$ du petit côté $Ab$ ne ſoit que les deux cinquièmes du quarré $aa$ du côté homologue AB ; or cela eſt ainſi (par la conſtruction) car $\frac{2AB}{5} \left(\frac{2a}{5}\right)$. $Ab(x) :: Ab(x) . AB(a)$ ; donc $\frac{2aa}{5} = xx$ : où l'on voit que le quarré $xx$ du petit côté $Ab$ eſt les $\frac{2}{5}$ du quarré $aa$ du grand côté AB ; C. Q. F. D.

L'équation $xx = \frac{2aa}{5}$, que j'ai trouvée par une

ſeule proportion, pouvoit être trouvée en faiſant uſage de deux proportions. La grande figure a été appellée S; appellons *f* la petite figure cherchée. Puiſque, ſuivant une des conditions du Problême, la petite figure doit être les $\frac{2}{5}$ de la grande, *f*. S :: 2 . 5; mais il y a une ſeconde condition, c'eſt que ces figures doivent être ſemblables. Or les figures ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés des côtés homologues. Les quarrés homologues ont été nommés *a*, *x*; donc on a cette autre proportion, *f*. S :: $xx$ . $aa$, & en rapprochant là premiere proportion *f*. S :: 2 . 5, on voit que deux rapports, égaux à un troiſième rapport, ſont égaux entr'eux. Donc $xx$ . $aa$ :: 2 . 5, d'où l'on tire, comme ci-deſſus, $2aa = 5xx$, ou $xx = \frac{2aa}{5}$.

Remarquez que l'équation $xx = \frac{2aa}{5}$ eſt une équation générale qui réſout tous les cas poſſibles de cette eſpece : car ſi on vouloit que la figure cherchée fût les $\frac{7}{9}$ de la figure propoſée, au lieu de $\frac{2aa}{5}$ mettant $\frac{7}{9}$ dans l'équation formulaire $xx = \frac{2aa}{5}$ elle deviendroit $xx = \frac{7aa}{9}$, & le Problême ſeroit réſolu en faiſant $\frac{7a}{9}$ . $x$ :: $x$ . $a$; c'eſt-à-dire, en trouvant une moyenne proportionnelle entre le côté AB & la neuvième partie de ſon ſeptuple, ou bien une moyenne proportionnelle entre le côté AB & les $\frac{7}{9}$ de ce côté : car $\frac{7a}{9}$ ſont la même choſe que $\frac{7}{9}$ de *a*. (*a*)

(*a*) La méthode ordinaire de réſoudre les Problêmes précédens eſt d'abord d'en propoſer la Réſolution, ſans faire voir comment on y a été conduit; après quoi on démontre que la conſtruction ſatisfait aux conditions du Problême. Nous avons pris une autre voie. Au lieu d'expoſer une Réſolution, nous la faiſons découvrir : comme on eſt obligé par-là de faire attention aux données du Problême, de marcher

PROB.

## PROBLÊME.

331. On a ſouvent beſoin de réduire un plan de fortification de grand en petit. Moyennant la réſolution du Problême ci-deſſus, la réduction s'en fait avec une très grande facilité. Soit donc le plan d'un quatré quelconque ABCD (*fig.* 105.) fortifié, qu'il s'agit de réduire en un autre plan trois fois plus petit.

## RÉSOLUTION.

D'un point O, pris au dedans de la figure, tirez les lignes OC, OS, OT, &c. à chaque angle. Appellons $a$ le côté OC, & $x$ le côté homologue correſpondant. Puiſque la figure cherchée doit être à celle-ci, comme 1 eſt à 3, dans l'équation formulaire $xx = \frac{2aa}{3}$ mettez $\frac{1}{3}$ au lieu de $\frac{2}{3}$; elle ſera $xx = \frac{aa}{3}$ donc $a . x :: x . \frac{a}{3}$. Ainſi le côté cherché, homologue au côté OC, eſt une moyenne proportionnelle entre $a$ & $\frac{a}{3}$ ou le tiers de $a$; por-

de conſéquence en conſéquence, en ſe rendant compte à chaque inſtant de ce que l'on doit faire pour avancer, on s'accoutume inſenſiblement à faire uſage de ſes forces, & même à devenir Inventeur.

Ceux qui ont bien ſaiſi l'eſprit de cette méthode, ont ſouvent plutôt fait de réſoudre une queſtion par eux mêmes, que d'en concevoir une réſolution trouvée. Nous avons déja fait obſerver que l'on n'étoit pas Géomètre, quoique l'on ſçût beaucoup de Géométrie; il n'eſt beſoin pour cela que de connoître ce que les autres ont découvert, de ſçavoir hiſtoriquement un grand nombre de démonſtrations, d'être au fait, s'il eſt permis de le dire, de ce que les autres ont penſé.

L'eſprit de la Géométrie conſiſte dans l'art d'employer ce que l'on ſçait, pour découvrir ce que l'on ne ſçait pas. On eſt très-avancé en Géométrie, quand on eſt parvenu à ce point; il n'y a plus, pour ainſi dire, qu'à ſe laiſſer aller pour devancer ceux qui en ſçavent beaucoup. En effet, on peut aſſurer que l'on ſçait toutes les Mathématiques, quand on en a l'inſtrument, & l'art de s'en ſervir. Ceux qui n'ont pas la vraie méthode ſont toujours très-embarraſſés, quand ils paſſent d'une partie des Mathématiques à une autre.

J'ai fait cette eſpece de digreſſion, afin que l'on conçoive qu'il eſt incomparablement plus avantageux de ſçavoir bien la Géométrie, que d'en ſçavoir beaucoup.

tez donc cette moyenne proportionnelle de O en *c*, & tirez *ct* parallèlement à CT, *ts* parallèlement à TS, & ainſi de ſuite, comme on l'a vu ci-deſſus, & ſelon que la figure ABCD le repréſente. Il eſt viſible que la petite figure *abcd* eſt tout-à-fait ſemblable à la grande figure ABCD: car, par la conſtruction, les côtés de l'une ſont proportionnels aux côtés de l'autre, à cauſe du parallélisme. De plus, la ſurface de la petite figure *abcd* n'eſt que le tiers de la grande figure, puiſque, ſelon la conſtruction, $OC.Oc :: Oc.\frac{OC}{3}$, d'où l'on tire $\frac{\overrightarrow{OC}}{3} = \overrightarrow{Oc}$; ce qui ſignifie que le quarré du petit côté Oc eſt le tiers du quarré du grand côté OC homologue: mais les ſurfaces des figures ſemblables ont le même rapport que les quarrés de leurs côtés homologues; par conſéquent la petite figure *abcd* n'eſt que le tiers de la grande; C. Q. F. D.

Tout ce qu'il faut obſerver dans la pratique, c'eſt de bien prendre garde à quel triangle répond chaque côté homologue. Revenons à la figure de ce Problême. Après avoir trouvé le point *c* du petit côté Oc, homologue au grand côté OC, on doit tirer *ct* parallèlement au grand côté CT; mais par où le côté *ct* ſera-t-il terminé? Obſervez dans quel triangle ſe trouve le grand côté CT; c'eſt dans le triangle OCT: ainſi le petit côté *ct*, qui eſt homologue au grand côté CT, ſera terminé par les deux côtés OC, OT du triangle OCT. On aura la même attention, quand il s'agira de déterminer les autres côtés homologues.

## PROBLÊME.

333. Réduire de petit en grand une figure quelconque ſelon tel rapport que l'on voudra. (*fig.* 106.)

## RÉSOLUTION.

Elle eſt préciſément la même que celle du Problême précédent. C'eſt uniquement pour le faire voir, que j'en donne un exemple.

D'un point *o*, pris au-dedans de la petite figure, tirez à chacun de ſes angles les lignes *oa*, *ob*, *oc*, &c. que vous prolongerez indéfiniment. Appellons *a* un de ces côtés *o a*, & nommons *x* le côté de la grande figure qui doit lui répondre ou lui être homologue. On veut une figure ſemblable qui ſoit quatre fois plus grande? Donc (n°. 306.) le quarré de l'un de ſes côtés doit être quatre fois plus grand que le quarré du côté homologue de la petite figure propoſée *abcdf*; on aura donc $xx = 4aa$; par conſéquent $4a.x :: x.a$, où l'on voit que le côté de la grande figure homologue au petit côté *o a*, eſt une moyenne proportionnelle entre *o a*, & le quadruple de *o a*: portez donc cette moyenne proportionnelle de *o* en A ſur le petit côté *o a*, prolongé; & par ce point A tirez A B parallèlement au côté *a b*, & le reſte, comme ci-deſſus. La grande figure A B C D F, qui en réſultera, ſera non ſeulement ſemblable à la petite figure *abcdf*, mais encore elle en ſera le quadruple. Cela eſt trop évident pour avoir beſoin de démonſtration, après tout ce que nous avons dit.

En tirant des lignes dans un plan, pour le réduire en triangles, & mener enſuite des parallèles, comme nous avons fait aux n°. 331 & 332, la figure dont on propoſe la réduction, deviendroit fort ſouvent, ainſi que la réduite, ſi chargée de lignes que la confuſion & l'exceſſive longueur du travail en ſeroient preſque inévitables. Quelques-uns prennent donc le parti de faire une échelle plus petite ou plus grande que celle du plan propoſé,

ſelon qu'ils veulent l'avoir ou plus petit ou plus grand. Mais l'échelle a encore un inconvénient; on n'y ſauroit diſtinguer les petites parties, à moins que cette échelle ne ſoit conſidérablement longue; & c'eſt préciſément ce que l'on cherche à éviter, quand il faut réduire de grand en petit. On tombe alors ſouvent dans le cas de ſe conduire par eſtime; mais, outre que l'eſtime n'eſt point Géométrique, elle exige une très longue pratique avant que l'on puiſſe compter ſur une exactitude recevable.

Une méthode rigoureuſement & très-ſimplement démontrée, qui joindroit la plus grande juſteſſe à l'économie du tems, qui ſupprimeroit la diviſion ou la graduation de l'échelle, qui n'exigeroit de la part du Praticien, aucune habitude antérieure, que celle de tracer une ligne droite & un cercle; une méthode enfin, où l'on n'auroit jamais recours à l'eſtime, & qui ne feroit décrire aucune ligne ſur le plan à réduire, auroit des avantages bien réels ſur celles dont nous avons déja parlé, & ſur quelques autres, dont nous parlerons après. Or nous avons crû voir tous ces avantages réunis dans la méthode ſuivante.

On propoſe de réduire la figure ABCDLNT (*fig. X. PL.* 21.) en une autre ſemblable & plus petite A *b c d l n t*, dont le circuit ſoit à celui de la première :: A *b*. AB, c'eſt-à-dire, que chaque côté de la grande ſoit toujours à ſon homologue dans la petite : : A B. A *b*.

Pour y parvenir : on tracera une ligne indéfinie AE (*fig.* Y.), ſur laquelle on portera le côté AB de la figure X de A en Q; & de ce point A, avec AQ l'on tracera l'arc indéfini QG, prenant enſuite A *b* de la figure X, on la portera ſur l'arc QG de Q en Z, & par les points AZ, l'on menera l'indéfinie AS; ce qui donnera l'angle EAS,

que j'appellerai dans la ſuite *angle réducteur* ; où l'on voit que le rayon A Q, & la corde Q Z ſont les deux termes du rapport, dans lequel on veut que ſoient les côtés homologues de la propoſée & de la réduite ; puiſque (conſt.) A B de la figure X a été fait = A Q de la figure Y, & A *b* = Q Z. Vous avez alors tous les préparatifs de votre réduction. Car, ſi vous voulez placer comme il faut, dans la figure cherchée, le côté B C de la Propoſée, ſuivant le rapport donné, vous prendrez B C avec un compas ordinaire, vous le porterez ſur la figure Y de A en M, & avec A M, du point A, vous tracerez l'arc M T O ; prenant enſuite la corde M O de cet arc, vous irez au point *b* de la figure X décrire un arc indéfini, dont M O, ſoit le rayon ; & cette ligne M O donnera la vraie longueur du côté cherché de la Réduite, correſpondant au côté B C de la Propoſée. Et pour déterminer, dans la Réduite, la poſition du point C de la Propoſée, vous procéderez préciſément, comme vous venez de faire ; c'eſt-à-dire que, prenant avec un compas la diſtance A C de la figure X, vous la porterez de A en D ſur la figure Y ; & du point A, avec ce rayon A D, vous tracerez l'arc D H L entre les côtés de l'angle réducteur, comme vous avez déja fait pour l'arc M T O ; prenant enſuite la corde D L de cet arc avec le compas, vous reviendrez en poſer une des pointes à l'angle A de la figure X, pour tracer un arc, dont cette corde D L ſera le rayon. Ce nouvel arc coupera le premier tracé du point *b* avec la cotde M O, & ſon interſection *c* déterminera la poſition du point C de la Propoſée dans la Réduite.

## DÉMONSTRATION.

Car, afin d'éviter la confuſion des lignes dans la

figure X, si vous imaginez les lignes AC, A*c*; elles donneront les triangles ABC, A*bc*, qui seront équiangles. Pour le comprendre, vous n'avez qu'à vous rappeller que AB (*fig.* X) = AQ de la figure Y; & que A*b* de la première = QZ de la seconde; pareillement que BC de la figure X = AM de la figure Y; & aussi que AC de la première = AD de la seconde. Or, il est évident, dans la figure Y, que les triangles AMO, AQZ sont équiangles; donc AM. MO :: AQ. QZ, ou (*fig.* X) :: AB. A*b*; mais (const.) AM de la figure Y = BC de la figure X; & MO de la première = *bc* de la seconde: ainsi, dans la figure X, BC. *bc* :: AB. A*b*.

Vous trouverez de même (*fig.* Y), que les triangles ADL, AQZ sont équiangles; & qu'ainsi AD. DL :: AQ. QZ :: AB. A*b*. Or (const.) AD de la figure Y = AC de la figure X, & DL de la première = A*c* de la seconde; donc :: AC. A*c* :: AB. A*b*; & par conséquent (*fig.* X) les trois côtés du triangle ABC sont proportionnels aux trois côtés du triangle A*bc*, chacun à chacun; l'angle B du premier est donc égal à l'angle *b* du second; & le côté *bc* a précisément la même position que le côté BC: ils sont d'ailleurs entr'eux dans la raison proposée; l'on a donc tout ce que l'on demandoit par rapport à ces deux côtés. Ce qui est incomparablement plus court à pratiquer qu'à décrire & à démontrer.

Voulez-vous avoir présentement, dans la Réduite, la grandeur & la position du côté CD de la Proposée? Prenez CD avec le compas, portez-la sur Y de A en N, & du point A, avec AN, décrivez l'arc NGK; prenez-en la corde NK, & avec cette corde, du point *c* de la figure X, décrivez un arc indéfini. Ensuite prenez BD dans la

même figure ; portez-la de A en R sur Y ; & avec A R, du point A, décrivez l'arc R P V ; prenez-en la corde R V, &, avec cette corde, du point *b* de la figure X décrivez un arc, qui coupera en un point *d*, celui qui a été décrit du point *c*, avec la corde N K de la figure Y. Si vous tirez alors *c d*, elle sera le côté correspondant à C D. Ce qui se démontre comme le cas précédent ; & ainsi des autres.

Pour se bien conduire dans cette pratique, les Commençans observeront que, si un côté de la Proposée est le rayon d'un arc dans l'angle réducteur, la corde de cet arc est précisément la longueur du côté correspondant dans la Réduite ; & qu'il ne s'agit plus que d'en déterminer la position, par le moyen d'un triangle.

On remarquera aussi que les lignes ponctuées de la figure X, & les cordes de la figure Y, ne doivent point se tracer dans la pratique ; elles ne paroissent ici que pour faire voir la réduction des figures en triangles, & démontrer la certitude de la méthode. Par exemple, la ligne C L n'est tracée dans la figure X que pour désigner l'ouverture du compas de C en L, afin de déterminer la position du côté D L.

Que la figure réduite soit à placer sur un autre papier & dans un autre angle de la Proposée, cela n'y fait rien ; la méthode & l'opération sont absolument indépendantes de ces circonstances.

Il ne nous reste plus qu'à donner un expédient aux Commençans, pour les tirer d'embarras lorsqu'ils auront une figure à transformer de petit en grand. Car la méthode dont on vient de faire usage, pourroit quelquefois leur paroître impossible. Si l'on vouloit, par exemple, transformer en grand la figure *m r p f g s k*, dans le rapport de A *m* à A M,

de manière que A M fût plus que le double de A *m*; en portant A *m* ſur l'angle réducteur (*fig.* Z) de A en R, & traçant une circonférence avec A R, on ne pourroit pas porter le côté A M de la figure X ſur cette circonférence, puiſqu'il eſt impoſſible d'y porter plus que ſon diamètre ou le double de ſon rayon. On n'y portera donc que la moitié, ou le tiers, ou le quart, &c. de A M, ſelon que le permettra la grandeur de la circonférence décrite avec A R = A *m* de la figure X. Dans le cas préſent, on a porté A H, moitié de A M, de R en O (*fig.* Z), de manière que A M = 2 R O; & par O l'on a mené A O pour avoir l'angle réducteur R A O, dont on ſe ſervira comme ci-deſſus, pour faire la transformation propoſée, en ayant la ſimple attention de doubler les cordes qui viendront, à chaque nouvel arc que l'on tracera dans l'angle réducteur. On tripleroit, on quadrupleroit ces cordes, ſi on n'avoit pris que le tiers ou le quart de A M, &c. Si l'on veut avoir, par exemple, dans la Réduite MRPFGSK (*fig.* X) la grandeur & la poſition du côté *m r* de la Propoſée, on prendra *m r* avec le compas; on la portera de A en S (*fig.* Z; & avec A S, du point A, on décrira l'arc S L; on en prendra la corde S L qu'on doublera, en faiſant deux portées de compas ſur une ligne droite tracée à volonté: l'ouverture du compas étant double de S L, on en mettra une des pointes en M de la figure X, & l'on tracera avec l'autre un arc indéfini, & le rayon de cet arc ſera la longueur du côté de la Réduite, homologue au côté *m r* de la Propoſée. Pour en avoir la vraie poſition dans la Réduite, on prendra la diſtance A *r* dans la Propoſée; on la portera de A en V (*fig.* Z) & avec A V, du point A, on tracera, dans l'angle réducteur, l'arc V T; on en prendra la corde V T, que l'on

doublera, comme ci-deſſus; & avec cette corde doublée, du point A de la figure X, on tracera un autre arc indéfini qui coupera en R, celui que l'on a déja tracé du point M, avec le double de la corde SL de la figure Z; ce qui donnera la vraie poſition de MR dans la Réduite, homologue à *m r* de la Propoſée, & telle que MR. *m r* :: AM. A*m*, ainſi qu'on l'a demandé. Mais il faut bien ſe rappeller, pour la Démonſtration, que MR (*fig.* X) = 2 SL (*fig.* Z), & que AR de la première = 2 VT de la ſeconde.

## DÉMONSTRATION.

Il eſt clair (*fig.* Z) que AR eſt à la corde RO, comme AS eſt à la corde SL. Or (conſt.) AR (*fig* Z) = A*m* (*fig.* X); & AS de la première = *mr* de la ſeconde. Donc A*m*. RO :: *m r*. SL, ou A*m*. 2 RO :: *m r*. 2 SL. Mais (conſt.) 2 RO (*fig.* Z) = AM (*fig.* X); & 2 SL de la première = MR de la ſeconde; par conſéquent (*fig.* X) A*m*. AM :: *m r*. MR, ou, ce qui eſt la même choſe, MR. *m r* :: AM. A*m*. En imaginant, dans la figure X, les lignes AR, A*r*, on démontrera, comme ci-deſſus, que AR. A*r* :: AM. A*m*, & qu'ainſi les triangles MAR, *m* A *r*, ont leurs côtés proportionnels, chacun à chacun; d'où il ſuit que l'angle M = *m*; & par conſéquent MR de la Réduite a la même poſition que *m r* de la Propoſée: d'un autre côté ces deux lignes ſont dans le rapport propoſé; l'on a donc tout ce que l'on demandoit; & c'eſt en ſuivant cette méthode, que l'on achevera la Réduite MRPFGSK.

Quelques Praticiens renferment la figure à réduire dans un quarré ou dans un rectangle, & ils le diviſent en petits quarrés; ils font après cela, ſur un autre papier, un quarré ou un rectangle

plus grand ou plus petit que le Proposé, selon qu'ils le veulent avoir ou plus grand ou plus petit; ils divisent ce nouveau rectangle dans le même nombre de petits quarrés, que la figure à réduire: après quoi ils dessinent dans chaque petit quarré de ce nouveau rectangle, tout ce qu'ils voient renfermé dans chaque petit quarré correspondant de la figure proposée. Mais, pour être sûr de la justesse d'une pareille Réduite, il faudroit que les yeux fussent des juges aussi exacts que le compas. Cette méthode n'est donc qu'une approximation, & doit être absolument rejettée en Géométrie, à moins qu'on ne lui en associe quelque autre qui en corrige l'incertitude.

Pour réduire un plan de grand en petit, il n'est pas nécessaire d'avoir tous les côtés de la figure que l'on veut réduire; il suffit d'en connoître quelques lignes & les angles formés sur cette ligne, comme nous allons le faire voir, en exposant la méthode de lever le plan d'une campagne, d'un pays, &c. ce qui n'est qu'une pure réduction de grand en petit. Or, lever le plan d'un pays, & en faire la Carte, c'est représenter sur le papier tous les endroits remarquables, comme les montagnes, les rivieres, les châteaux, les grands chemins, les villages, &c. que ce pays contient. Il n'est point question ici de la Carte générale d'un grand Royaume, où l'on a coutume de faire usage des connoissances Astronomiques. On se propose seulement de faire voir que par le simple secours des triangles proportionnels, on peut lever tout un pays, montrer la situation de ses différentes parties, faire connoître le rapport de leurs distances; ensorte que la seule vue d'un plan d'une campagne puisse faire juger sûrement de la disposition & de l'éloignement réciproque des différens endroits, que l'on juge à propos d'y repré-

senter. Car c'eſt au deſſein à en montrer les élévations & les enfoncemens par le moyen de la lumière & des ombres.

## PROBLÊME.

333. Lever le plan ou faire la Carte d'un pays ou d'une campagne, telle que la repréſente la figure ABCD, &c. (*fig.* 111.)

## RÉSOLUTION.

On choiſira une ligne ou une diſtance OP (*a*), la plus grande que l'on pourra, ſur les extrémités de laquelle on fera les opérations que je vais décrire. Il faudra placer horiſontalement le Graphomètre à l'une des extrémités O, & aligner ſon diamètre à l'autre extrémité P, où l'on doit avoir planté un piquet. Après cela, on viſera aux points A, B, C, D, F, G, H, & on marquera avec beaucoup d'attention les angles AOP, BOP, COP, &c. que les rayons viſuels OA, OB, OC, &c. menés aux points A, B, C, &c. feront avec la baſe OP. On tranſportera enſuite l'inſtrument à l'autre extrémité P de la baſe OP; on le placera toujours bien horiſontalement, & l'on alignera ſon diamètre au point O: enſuite avec l'alidade ou la regle mobile on viſera, comme ci-deſſus, aux mêmes points A, B, C, &c. on marquera, avec la plus grande exactitude poſſible, les angles que les rayons viſuels, dirigés à ces points, feront au point P de la baſe OP.

Nous n'avons point parlé des points EK, parceque les angles qu'ils font avec la baſe OP ſont trop obtus; mais, voici comment on les déterminera. Pour le point E, on ſe ſervira de la ligne DP. Sur ſes

(*a*) Cette ligne OP eſt ordinairement appellée *baſe*.

extrémités D, P, on prendra la valeur des angles DPE, PDE.

Prenant enſuite A O pour baſe, afin de déterminer le point K, on travaillera à connoître les angles OAK, KOA, que l'on écrira avec ſoin. Enfin on meſurera la baſe OP, que je ſuppoſe de 500 toiſes.

Toutes ces opérations finies, on peut conſtruire à ſon aiſe ſur une Carte le plan dont on a beſoin: car l'on a préſentement tout ce qu'il faut pour cela. On prendra donc une ligne *o p* que l'on diviſera en 500 petites parties. Elle repréſentera la grande baſe O P de 500 toiſes, priſes ſur le terrein, & de plus elle pourra ſervir d'échelle pour meſurer la diſtance réciproque des différens endroits, qui doivent être repréſentés ſur la Carte. On fera enſuite aux extrémités *o*, *p* de cette petite ligne, les mêmes angles que l'on aura trouvés ſur la grande baſe O P, c'eſt-à-dire, que l'on fera les angles *a o p* = A O P, *b o p* = B O P, *c o p* = C O P, *d o p* = D O P; & puis *o p a* = O P A, *o p b* = O P B, *o p c* = O P C, *o p d* = O P D; ce qui déterminera les lieux *a*, *b*, *c*, *d*, ſur la Carte, auſſi-bien que la diſtance *p d*, aux extrémités *p*, *d*, de laquelle on fera les angles *d p e*, *p d e*, égaux aux angles D P E, P D E, faits ſur la ligne P D du terrein; les côtés *p e*, *d e* de ces angles, détermineront par leur interſection le point *e* correſpondant à l'endroit E ſur le terrein. On continuera de faire les angles *o p f* = O P F, *o p g* = O P G, *o p h* = O P H; enſuite *p o f* = P O F, *p o g* = P O G, *p o h* = P O H: ces angles détermineront par l'interſection de leurs côtés, les lieux *f*, *g*, *h*, & il ne reſtera plus que le point *k* à trouver. On agira à ſon égard, comme l'on a fait par rapport au point *e*, c'eſt-à-dire, que ſur la ligne *o a* qui a été déterminée, on fera les angles *a o k*,

*o a k* égaux, chacun à chacun, aux angles A O K, O A K formés sur la distance O A; l'intersection des côtés *o k*, *a k*, déterminera le point *k* du plan, & la Carte sera achevée.

## DÉMONSTRATION.

Il faut prouver que tous les points *a*, *b*, *c*, &c. trouvés, ainsi que nous venons de l'enseigner, représentent non-seulement la situation des lieux A, B, C, &c. les uns à l'égard des autres, mais encore leurs distances réciproques.

Nous avons dit que les figures semblables étoient celles dont tous les angles étoient égaux, chacun à chacun, & les côtés des angles correspondans proportionnels : or c'est ce que nous avons exécuté en construisant la petite figure *a b c d e*, &c. puisque tous les triangles qui la composent, sont semblables à tous les triangles dont est composée la grande figure du terrein, chacun à chacun. Ce que je vais faire voir, en prenant seulement les deux triangles correspondans *a o p*, A O P, parceque tous les autres ont été construits de la même façon.

Il est certain (n°. 285.) que deux triangles sont semblables, quand deux angles de l'un sont égaux à deux angles de l'autre, chacun à chacun : or tels sont les triangles *a o p* A O P, puisque (par la const.) l'angle *a o p* = A O P, & l'angle *o p a* = O P A; donc le troisième angle est égal au troisième angle, & les deux triangles sont équiangles; par conséquent ils ont leurs côtés proportionnels. Si vous dites la même chose des autres triangles correspondans, vous concevrez aisément que la petite figure de la Carte est un modèle du terrein que l'on s'est proposé de représenter.

Ainsi, quand on voudra sçavoir la distance d'un endroit à l'autre, par exemple, de A en B, on

prendra avec un compas la distance *a b*; on la portera sur la ligne *o p* qui sert d'échelle, à cause que nous l'avons divisée en 500 petites parties; & l'on jugera, par le nombre des parties que la ligne *a b* prendra sur l'échelle, de la distance du point A au point B.

Car, supposons que *a b* contienne 130 petites parties de la base ou de l'échelle *o p*; je dis que la distance du lieu A au lieu B = 130 toises. Vous n'avez qu'à considérer les deux triangles *a o b*, A O B; il est aisé de prouver que ces deux triangles sont semblables, ou que les côtés de l'un sont proportionnels aux côtés de l'autre: car, 1°. (par la construction) l'angle *a o p* = A O P, & l'angle *b o p* = B O P; donc *a o p* — *b o p* (*a o b*) = A O P — B O P (A O B); l'angle *a o b* est donc égal à l'angle A O B.

Mais de plus, les deux triangles *a p o*, A P O semblables (par la construction) donnent *o p*. O P :: *o a*. O A: par la même raison les deux triangles semblables *b p o*, B P O donnent aussi *o p*. O P:: *o b*. O B; & comparant cette dernière proportion avec la première, on voit que *o a*. O A :: *o b*. O B, puisque les deux rapports de cette proportion sont égaux au rapport de *o p* à O P.

Donc, 2°. les côtés *o a*, *a b* de l'angle *a o b*, sont proportionnels aux côtés O A, A B de l'angle A O B = *a o b*: or (n°. 284.) deux triangles sont semblables, quand ils ont un angle égal & les côtés qui forment cet angle proportionnels. Par conséquent les deux triangles *a o b*, A O B sont semblables; donc les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels; ainsi *a b*. A B :: *a o*. A O : or *a o*. A O :: *o p*. O P; donc *a b*. A B :: *o p*. O P. Mais *o p* (supp.) représente O P; par conséquent *a b* représentera A B: ainsi les 130

parties de $ab$ feront l'expreſſion des 130 toiſes contenues dans la longueur AB.

Cette méthode eſt donc très-propre à faire connoître la diſtance réciproque des lieux qu'on lève ſur le terrein.

334. J'ai dit qu'il ne falloit pas prendre des angles trop obtus, ni par conſéquent des angles trop aigus; c'eſt que la même erreur, commiſe en prenant des angles très-aigus ou très obtus, produit un inconvénient beaucoup plus conſidérable, qu'il ne le ſeroit en prenant des angles d'une grandeur moyenne.

Pour en avoir une preuve bien ſenſible, ſuppoſons que du point O (*fig.* 107.) l'on voie la diſtance $Ab$ ſous l'angle $bOA$, qui eſt paſſablement aigu; & que du même point O la diſtance $AB = Ab$ ſoit vue ſous l'angle très-aigu BOA. Il eſt évident que ſi l'angle $bOA$ eſt pris trop grand de la quantité $bOx$, l'erreur que l'on commettra ſur la longueur $Ab$, ſera exprimée par $bx$; mais ſi on fait la même faute en prenant l'angle BOA, c'eſt-à-dire, qu'on le prenne trop grand de la quantité $BOS = bOx$, l'erreur ſera BS incomparablement plus grande que $bx$; ce que je laiſſe à démontrer rigoureuſement à ceux qui ne ſeront pas aſſez convaincus par le témoignage des ſens.

335. Nous avons auſſi fait obſerver que le Graphomètre devoit être placé très horiſontalement, afin que les endroits qu'on lève, ſe trouvant toujours dans un plan parallèle à l'horiſon, ſoient auſſi toujours à égale diſtance, ſoit que l'on viſe à des points de ces objets plus hauts, ſoit que l'on aligne à des points plus bas. Imaginez-vous que la ligne AB (*fig.* 108.) ſoit une ligne horiſontale au-deſſus de laquelle s'élevent verticalement les objets AS, BO. Du point $x$ élevé au-deſſus du point A, où

eſt placé le pied de votre Graphomètre, viſez horiſontalement à un point $y$ de l'objet BO : tranſportez enſuite votre inſtrument au point B; diſpoſez-le horiſontalement, & ſuppoſons qu'il s'élève juſqu'au point $t$ plus haut que le point $y$. De ce point $t$ viſez à l'objet AS : le rayon viſuel $tr$ rencontrera un point $r$ plus haut que le point $x$ de l'objet AS; mais cela ne changera en rien la diſtance de l'objet AS à l'objet BO : car, à cauſe du paralléliſme des lignes AB, $xy$, cette diſtance ſera toujours la même, ſoit qu'on la prenne ſur $xy$ ou ſur $rt$, puiſque $xy = rt$.

Cependant ce que nous venons de dire, ne peut regarder que des objets qui ſont peu élevés au-deſſus de l'horiſon. S'il falloit auſſi marquer ſur la Carte la diſtance d'une haute montagne à une baſe quelconque, on s'y prendroit de la maniere ſuivante.

## PROBLÊME.

336. Déterminer la diſtance d'une montagne MS aux points O, P de la baſe OP. (*fig.* 109.)

## RÉSOLUTION.

On placera, comme ci-deſſus, le Graphomètre ſucceſſivement aux points O, P, & ſon diamètre horiſontalement dans la direction de la baſe OP; alors on fera hauſſer le plan du Graphomètre juſqu'à ce que l'on apperçoive le ſommet M de la montagne dans la direction de l'alidade, c'eſt-à-dire, que le plan du Graphomètre prendra une inclinaiſon telle que, ſi on le prolongeoit, il paſſeroit par le ſommet M de la montagne. L'inſtrument dans cette ſituation fera connoître les angles MOP, MPO, leſquels, rapportés aux extrémités $o$, $p$ de la petite baſe $op$ de la Carte, donneront, par l'interſection

ſection de leurs côtés les diſtances *o m*, *p m* du ſommet *m* de la montagne aux points *o*, *p* de la baſe *o p*; puiſque les triangles M O P, *m o p* étant équiangles, leurs côtés homologues ſont proportionnels; & par conſéquent *o m* repréſentera O M, & *p m* répondra à la diſtance P M ſur le terrein.

Mais O M n'eſt pas la diſtance de la montagne au point O, ni P M celle de la même montagne au point P. Repréſentez-vous une verticale M S, ou une ligne qui tombe du ſommet M perpendiculairement à l'horiſon. Si des points O, P vous imaginez les horiſontales O S, P S, qui ſoient par conſéquent perpendiculaires à la verticale M S, ces horiſontales marqueront la véritable diſtance de la montagne aux points O, P; parce que la diſtance d'un point à un objet, doit néceſſairement s'eſtimer par la perpendiculaire menée de ce point ſur la longueur de l'objet. (n°. 37.)

Ce ſont donc les diſtances O S, P S que nous avons à déterminer. Pour cela, aux points O, P, on diſpoſera verticalement le plan du Graphomètre, dont le diametre doit être horiſontalement dirigé vers la montagne, afin de pouvoir prendre les angles M O S, M P S, que les lignes M O, M P font avec les horiſontales O S, P S; alors dans les triangles rectangles O M S, P M S, vous connoîtrez tout ce qui eſt néceſſaire pour déterminer ſur la Carte, non ſeulement les diſtances O S, P S, mais encore la verticale M S: car en faiſant l'angle *m o s* = M O S, & l'angle *m p s* = M P S, l'interſection des deux côtés *o s*, *p s* donnera le point *s* de la verticale *m s*; ainſi les lignes *o s*, *p s*, *m s* de la Carte feront connoître les diſtances O S, P S & la hauteur M S imaginées ſur le terrein. Ce qui eſt évident, puiſque les triangles de la petite figure ſont ſemblables à ceux de la grande, chacun à chacun.

est placé le pied de votre Graphomètre [illegible] fontalement à un point *y* de l'obje[illegible] portez ensuite votre instrument au [illegible] fait [illegible] fez-le horisontalement, & supp[illegible] jusqu'au point *t* plus haut que le [illegible] *t* visez à l'objet AS : le rayon [illegible] juste un point *r* plus haut que l[illegible] use *o m* mais cela ne changera en [illegible] othénuse AS à l'objet BO : car [illegible] oint *o* un an- lignes AB, *x y*, ce[illegible] ue vous aurez même, soit qu'on la [illegible] ence du cercle dé- que $xy = rt$. [illegible] e rectangle *o s m* sem-

Cependant ce [illegible] rectangle O S M. Vous regarder que de[illegible] méthode, la longueur du de l'horison. S[illegible], en décrivant un cercle sur la distance d'[illegible] du triangle rectangle *p s m*; & conque, or[illegible] *p* l'angle *s p m* égal à l'angle S P M [illegible] terrein : car le côté *p s* se trouvera [illegible] par la circonférence du cercle.

336. Les deux côtés *o s*, *p s* une fois trouvés, il sera aux [illegible] de les disposer sur la base *o p* (*fig.* 110) dans [illegible] ination qui leur convient, puisqu'il ne sera plus question que de faire un triangle avec les trois lignes *o p*, *o s*, *p s*; & le point *s* sera placé sur la Carte où il doit être.

337. Il n'est pas toujours nécessaire d'établir une base sur le terrein pour déterminer la distance de certains endroits à un point donné. Si l'on con-

(a) *Représentation perspective*, c'est-à-dire, une représentation des objets tels qu'ils paroissent aux yeux, & non pas tels qu'ils sont en effet; cela vient de ce que l'on est obligé de tracer sur un plan des lignes qui sont dans différens plans, lorsqu'on les considere en nature : d'où il arrive souvent qu'un angle, représenté sur le papier, est renfermé dans un autre, qui est pourtant plus petit que lui, pris sur le terrein. Afin que les Commençans conçoivent comment cela peut se faire, il est à propos de disposer des objets de maniere qu'ils produisent aux yeux les effets dont nous venons de parler. On leur fera remarquer comment les lignes qui forment des angles, viennent s'arranger sur le papier, c'est-à-dire, sur le *Tableau où elles se représentent.*

emple, la distance de A en B, (*fig.*
de D en A, & qu'étant placé
le C, d'où les objets A, B, D
savoir combien on est éloi-
roit se passer de base, en
nces AB, BD, DA
acile de les représen-
nt le triangle semblable
uit sur une échelle, dont
parties pour chaque côté qu'il
dans chaque distance correspon-

arque ensuite que du point C donné sur
ein, on peut connoître les angles ACD,
B (*fig.* 112), dont les côtés AD, AB sont
les bases; par conséquent, si dans le triangle *abd*
(*fig.* 113.) je puis trouver un point *o*, d'où tirant
les lignes *oa*, *ob*, *od*, l'angle *aod*, opposé au
côté *ad*, soit égal à l'angle ACD, opposé à la
distance AD correspondante, & l'angle *aob* soit
égal à l'angle ACB opposé au côté AB, repré-
senté par le petit côté *ab*, il est certain que le point
*o* sera déterminé dans la Carte, de même que le
point C l'est sur le terrein, ainsi que je le démon-
trerai rigoureusement plus bas.

Mais *ad* peut être considéré comme la corde
d'un cercle qui passeroit par les trois points *a*, *o*, *d*;
& cette corde retranche un segment capable de l'an-
gle *aod* = l'angle ACD donné. De même le
côté *ab* peut être aussi considéré comme la corde
d'un cercle, dont la circonférence passe par les trois
points *a*, *o*, *b*; d'où l'on voit que cette corde *ab*
retranche un segment capable de l'angle *aob*
= l'angle ACB donné; le point *o* d'intersection
des deux circonférences est donc le point qui satis-
fait à la question. Ainsi le Problème se réduit à cons-

truire sur une ligne donnée un segment de cercle capable d'un angle donné.

## PROBLÊME.

338. Sur la ligne donnée $ab$ (*fig.* 114) construire un segment de cercle capable de l'angle donné M, c'est à-dire, construire un segment dans lequel on puisse inscrire un angle égal à l'angle donné M.

## RÉSOLUTION.

Au point $a$ de la ligne $ab$ (*fig.* 114) faites l'angle $bas$ égal à l'angle donné M. Au même point $a$ sur le côté indéfini $as$ élevez la perpendiculaire $ao$, que vous prolongerez jusqu'à ce qu'elle coupe, au point $o$, la perpendiculaire $to$ élevée sur le milieu de la ligne $ab$ donnée. De ce point $o$ avec le rayon $oa$ décrivez une circonférence de cercle, laquelle passant nécessairement par les points $a$, $b$, produira le segment $axb$, dans lequel on pourra inscrire un angle égal à l'angle donné M.

## DÉMONSTRATION.

D'un point quelconque $x$ du segment $axb$ tirez les cordes $xa$, $xb$, afin d'avoir l'angle $axb$ inscrit dans le segment trouvé; il s'agit de prouver que cet angle est égal à l'angle donné M: or c'est ce qui est évident. Car, puisque (par la const.) $ao$ est perpendiculaire sur $as$, la circonférence décrite du point $o$ avec le rayon $ao$ touche la ligne $as$ (n°. 105); par conséquent l'angle $axb$ = l'angle $bas$, parce que chacun de ces angles a pour mesure la moitié du même arc $ab$ qui passe entre ses côtés (n°. 103 & 105.); mais (par la const.) l'angle $bas$ = M; donc l'angle $axb$ est aussi = M, & par con-

séquent l'on a construit sur la ligne *a b* un segment de cercle capable de l'angle donné M, ainsi qu'on le demandoit ; C. Q. F. D.

Je ne crois pas, 1°. qu'il soit nécessaire de prouver que les perpendiculaires *a o*, *t o* doivent se rencontrer : on voit bien que l'angle *o a s* étant droit, l'angle *o a b* est aigu, & qu'ainsi *o a* s'incline sur *a b* vers la perpendiculaire *t o*, qu'il doit enfin rencontrer.

2°. On comprend assez, sans que j'en avertisse, que la circonférence décrite du point *o* avec le rayon *o a*, doit passer par l'autre point *b* de la ligne donnée *a b* ; puisque (par la const.) tous les points de la perpendiculaire *t o* sont à égale distance des points *a*, *b*.

Revenons présentement à la figure 113. Après avoir construit, comme nous l'avons dit, le petit triangle *a b d*, semblable au grand triangle A B D, sur le côté *a d* on construira un segment de cercle capable de l'angle donné A C D, & sur le côté *a b* on construira de même un segment de cercle capable de l'angle donné A C B ; ces deux cercles se couperont au point *o* cherché. Ainsi en tirant les lignes *o a*, *o b*, *o d*, & les portant sur l'échelle qui a servi à la construction du triangle *a b d*, elles feront connoître les distances C A, C B, C D, que l'on se proposoit de découvrir ; ce qui ne paroît pas avoir besoin d'autre démonstration.

Mais comme les vraisemblances & la déposition des sens sont des témoins qu'on récuse fort souvent en Géométrie, on va démontrer rigoureusement, que les lignes *a o*, *o d*, *o b* du plan sont proportionnelles aux distances C A, C D, C B que l'on veut connoître.

## DÉMONSTRATION.

Par les points A, C, B de la figure 112 imaginez la circonférence ACBFA, ainſi qu'on en a fait paſſer une par les points *a*, *o*, *b* de la figure 113. Prolongez DC juſqu'à la rencontre de la premiere en F, & menez les cordes FA, FB; de même, prolongez *do* juſqu'à la rencontre de la ſeconde circonférence en *f*, & menez auſſi les cordes *fa*, *fb*. Après cela, vous trouverez que les triangles ABF, *abf* ſont équiangles. Car (par la conſt.) les angles ACD, *aod* étant égaux, leurs ſupplémens ACF, *aof* le ſeront auſſi; &, par la même raiſon, l'angle BCF = *bof*. Mais l'angle ABF = l'angle ACF, parce qu'ils ont leur ſommet à la circonférence, & qu'ils ſont appuyés ſur le même arc AF. Par la même raiſon l'angle *abf* = *aof*; donc, puiſque ACF = *aof*, ainſi qu'on vient de le voir, on aura ABF = *abf*. Si l'on fait le même raiſonnement, on s'appercevra que l'angle BCF = BAF, & auſſi que l'angle *bof* = *baf*: mais on a vu que BCF = *bof*; donc BAF = *baf*. Ainſi les triangles ABF, *abf* ſont équiangles; ce qui donne AF. *af* :: AB. *ab*; mais (conſt.) AB. *ab* :: AD. *ad*; donc AF. *af* :: AD. *ad*. De plus l'angle DAF = *daf*. Car DAB = *dab* (conſt.), & l'on vient de voir que BAF = *baf*; ainſi les deux triangles DAF, *daf* ſont équiangles (n°. 284.), c'eſt-à-dire que l'angle ADF = *adf*; ce qui rend auſſi ſemblables les deux triangles DCA, *doa*, à cauſe de l'angle ACD = *aod* (ſupp.); donc AD. *ad* :: AC. *ao* :: CD. *od*, & auſſi :: CB. *ob* (à cauſe des triangles équiangles DCB, *dob*); & c'eſt tout C. Q. F. D.

Le point C de la Fig. 112 pouvant être ſitué ſur quelqu'un de ſes côtés ou au dehors, j'en détaillerai toutes les circonſtances dans la Trigonométrie par les ſinus, qui eſt à la fin de cet Ouvrage.

Les Problêmes précédens ont dû nous convaincre ſuffiſamment de l'extrême utilité des triangles ſemblables, ſoit dans les recherches, où l'on ſe propoſe de faire quelques découvertes, ſoit dans l'application de la Géométrie aux Arts de la ſociété, qui ſont aux hommes une ſource perpétuelle de commodités & d'agrémens; c'eſt pourquoi nous allons terminer ce Livre par deux Problêmes dont l'uſage eſt aſſez fréquent.

## PROBLÊME.

339. Couper une ligne AB en parties proportionnelles aux parties DC, CF, FG, &c. de la ligne DG. (*fig.* 115.)

## RÉSOLUTION.

Avec la ligne DG faites le triangle équilatéral DOG; du point O portez la ligne AB de O en A & B ſur les côtés OD, OG: tirez AB. Après cela menez aux points de diviſion C, F, les lignes OC, OF. Ces lignes couperont la ligne AB en parties AM, MT, TB, proportionnelles aux parties DC, CF, FG de la ligne DG; c'eſt-à-dire, que l'on aura AM. DC :: MT. CF :: TB. FG.

## DÉMONSTRATION.

Le triangle ODG eſt équilatéral, (par la conſt.) & de plus OA = OB; par conſéquent les points A, B ſont également éloignés de la ligne DG; donc AB eſt parallele à la baſe DG: ainſi (n°. 280)

OD.DG::OA.AB; or OD=DG; donc OA=AB, c'eſt-à dire, que la parallele eſt préciſément égale à la ligne qu'il s'agit de diviſer.

Mais, à cauſe du paralléliſme des lignes DG, AB, AM.DC :: OM.OC :: MT.CF :: OT.OF :: TB.FG. Donc AM.DC :: MT.CF :: TB.FG; C.Q.F.D.

Enfin, comme nous avons ſouvent parlé d'échelles, nous ne devons pas ſupprimer la maniere d'en conſtruire qui repréſentent des toiſes, des pieds, des pouces, des lignes, &c. Dans l'Arpentage on néglige les lignes, & même quelquefois les pouces.

## PROBLÊME.

340. Conſtruire une échelle qui repréſente des toiſes, des pieds, des pouces. (*fig.* 116.)

## RÉSOLUTION.

Suppoſons que l'on demande une échelle de 4 toiſes, où les pieds & les pouces ſoient marqués. Prenez une ligne AB que vous diviſerez en cinq parties égales. Les quatre premieres parties, en allant de gauche à droite, ſeront deſtinées à repréſenter chacune une toiſe, & l'on diviſera la derniere partie en 6, pour avoir les 6 pieds compris dans une toiſe. Il faut préſentement trouver les pouces, c'eſt-à-dire, les douziemes parties de la petite ligne qui repréſente un pied. Afin d'y parvenir, au point B on élévera une perpendiculaire BD indéfinie, ſur laquelle on prendra douze parties égales à volonté; après quoi on achevera le parallélogramme ABCD. Par les points de diviſion on tirera des verticales & des horiſontales. Enfin on ménera les diagonales 65, 54, 43, &c. & l'échelle ſera achevée.

L'uſage de cette échelle eſt aſſez ſimple. Voulez-vous prendre ſur cette échelle 3 toiſes, 5 pieds, 7 pouces? Mettez une des pointes du compas ſur la verticale I au point *r*, où l'horiſontale 77 coupe cette verticale. Ouvrez le compas juſqu'à ce que vous rencontriez ſur cette horiſontale la verticale 55; cela vous donnera 3 toiſes, 5 pieds: ouvrez encore le compas juſqu'à l'interſection *s* de cette même horiſontale & de la diagonale 65; je dis que la longueur *r s* contient 3 toiſes, 5 pieds, 7 pouces de l'échelle.

## DÉMONSTRATION.

Il eſt d'abord évident que *r s* contient 3 toiſes, 5 pieds depuis *r* juſqu'en *t*: car il n'y a qu'à compter. Reſte à prouver que la petite ligne *t s* vaut 7 pouces. Remarquez que les deux triangles 556, 5 *t s* ſont ſemblables; donc 5 *t*. 55 :: *t s*. 56. Or 5 *t* contient $\frac{7}{12}$ parties de la ligne verticale 55; donc auſſi *t s* contient $\frac{7}{12}$ parties de la ligne 56, qui vaut 12 pouces; c'eſt-à-dire, que *t s* = 7 pouces; par conſéquent la ligne *r s* = 3 toiſes, 5 pieds, 7 pouces de l'échelle.

# LIVRE IV,

## OU L'ON TRAITE DE LA MESURE DES SOLIDES.

### CHAPITRE PREMIER.

*Génération des Solides. Evaluation de leurs ſurfaces.*

341. ON appelle *Solide* en Géométrie tout corps évalué ſelon ſes trois dimenſions. Il y a plus de deux mille ans qu'Archimede (un des plus profonds Géometres qui aient jamais exiſté) a découvert toute la doctrine des Solides. Ceux qui ſont venus après lui n'ont eu à ſimplifier que quelques démonſtrations. Le génie de cet homme extraordinaire n'avoit rien laiſſé à trouver là deſſus; il a même été au-delà de nos beſoins.

Je vais expoſer le plus clairement qu'il me ſera poſſible la ſublime Théorie ſur laquelle eſt fondée la meſure des Solides. Nous ne croyons pas qu'il y ait pour cela de méthode plus lumineuſe que celle de les engendrer ſuivant certaines conditions. En voyant ce qui entre dans la compoſition d'un Solide, on eſt beaucoup plus en état d'en déduire les propriétés.

342. Repréſentez-vous que le plan A B C (*fig.*

117) triangulaire coule parallelement à lui-même le long de la ligne C D verticale. Si ce plan laiſſoit une trace de ſa figure à chaque point où il arrive, il eſt évident qu'il en naîtroit le corps ou le ſolide A B C D G H, que l'on appelle en général *un Priſme*; mais le Priſme reçoit des noms différens ſelon la différence des plans générateurs. On l'appelle *Priſme triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, &c. ſelon que la figure génératrice eſt un Triangle, un Quadrilatere, un Pentagone, &c.

On dit auſſi qu'un Priſme eſt *droit*, quand la ligne D C, ſur laquelle il a été engendré, eſt perpendiculaire au plan qui lui ſert de baſe; mais on l'appelle *oblique*, lorſqu'il s'incline ſur ſa baſe.

Un Priſme eſt donc un corps qui a dans toute ſon étendue une groſſeur égale, dont les baſes ſupérieures & inférieures ſont ſemblables, égales & paralleles: il eſt entouré de faces parallélogrammes, quand ſon plan générateur eſt une figure d'un nombre de côtés déterminé.

343. Si le plan générateur eſt un parallélogramme, le ſolide engendré eſt nommé *Parallélipipede*: telle eſt la figure O G P M S (*fig.* 118.) dont les faces oppoſées ſont des parallélogrammes égaux, ſemblables & paralleles.

344. Le Parallélipipede prend le nom de *Cube*, lorſque ſa baſe eſt un quarré, & que ſa hauteur eſt égale au côté du quarré. On ſuppoſe toujours que le plan générateur s'éleve perpendiculairement de deſſus ſa baſe. *Voyez* la figure 119.

Les corps que nous venons de définir ſont tous les jours devant nos yeux. Un dé à jouer eſt un cube: un livre, une poutre, une regle ont à peu près la forme d'un parallélipipede. Les carreaux hexagones, avec leſquels on carrele les appartemens, ſont de vrais Priſmes.

Il faut pourtant convenir que, ſans le ſecours de l'Art, la nature ne nous fournit gueres de modeles bien exacts de ces eſpeces de ſolides ; mais tel a été le génie des premiers Inventeurs : ils ont imaginé des ſolides d'une meſure commode, afin d'y pouvoir rapporter enſuite les corps les moins uniformes dans leurs dimenſions.

## PROBLÊME.

345. Déterminer la ſurface du Cube, du Parallélipipede, du Priſme.

## RÉSOLUTION.

1°. Par la génération du Cube (*fig.* 119) ce Solide eſt terminé par ſix faces égales qui ſont des quarrés. Ainſi, après avoir meſuré l'une de ſes faces, on en multipliera l'aire par 6, & ce dernier produit exprimera la ſurface totale du Cube.

2°. Remarquez auſſi que le Parallélipipede a ſix faces, dont les oppoſées ſont égales. (*fig.* 118.) Cherchez donc la ſuperficie des faces OGDT, TDMS, GPMD ; faites-en la ſomme, & multipliez-la par 2 : vous aurez la ſurface totale du Parallélipipede.

3°. Quant à la ſurface du Priſme, (*fig.* 117.) on eſt sûr d'abord par la génération de ce Solide, que la baſe ſupérieure ABC eſt égale à la baſe inférieure HGD. On prendra donc la meſure de l'une de ſes baſes que l'on doublera. Après cela on comptera les côtés du plan générateur ; le nombre de ces côtés indiquera celui des parallélogrammes qui entourent le Priſme. Ces Parallélogrammes enveloppans ſeront tous égaux, ſi le Polygone générateur eſt régulier : ainſi la connoiſſance de l'un de ces Parallélogrammes les fera connoître tous ; mais il faudra prendre ſéparément la meſure de chacun d'eux,

en cas que la figure génératrice ait tous ſes côtés inégaux. L'aire de tous les Parallélogrammes réunis, jointe à celle des deux baſes, donnera la ſurface totale du Priſme.

Il ne faut qu'un coup d'œil pour concevoir tout ceci, quand on a des Solides réels devant les yeux. Il eſt donc à propos que l'on s'en fourniſſe. On verra même qu'ils ſont abſolument néceſſaires à l'intelligence de certaines figures qu'il eſt preſque impoſſible de repréſenter ſur le papier.

346. Soit le Parallélogramme rectangle CBDF (*fig.* 120.) élevé verticalement ſur un plan. Suppoſez que ce rectangle tourne autour de ſon côté fixe FC qui lui ſert de charniere. En faiſant ſa révolution, il engendrera un corps rond d'une égale groſſeur dans toute ſon étendue, & dont les deux baſes ſupérieure & inférieure ſeront deux cercles égaux, qui auront pour rayon le côté CB ou FD = CD. Cette eſpece de Solide s'appelle un *Cilindre*. Une canne, une colonne, également groſſes dans toute leur longueur, ſont de vrais cilindres.

On nomme *axe* du cilindre la ligne FC, qui joint les centres F, C des deux cercles qui peuvent ſervir de baſe au cilindre. Quand l'axe eſt perpendiculaire à la baſe, on dit que le cilindre eſt *droit*; mais qu'il eſt *ſcalene* ou *oblique*, ſi ſon axe eſt incliné ſur la baſe; & alors la génération n'eſt pas la même. On peut le concevoir engendré par un cercle qui coule parallelement à lui-même le long d'une ligne oblique au plan qui lui ſert de baſe.

On voit par la génération du cilindre, que ce Solide a une ſurface compoſée, pour ainſi dire, de trois pieces. Il eſt terminé par deux cercles égaux qui ſont deux ſurfaces planes, & ſa longueur eſt entourée d'une ſurface courbe, que nous appellerons *ſa ſurface convexe*.

## PROBLÊME.

347. Trouver la surface d'un cilindre droit. (*fig.* 120.)

## RÉSOLUTION.

1°. On trouvera, ainsi qu'il a été enseigné (n°. 202), la surface des deux bases circulaires.

2°. Multipliez la circonférence de l'une des bases circulaires par la hauteur DB du cilindre, vous aurez sa surface convexe; vous l'ajouterez à la surface des deux bases circulaires, ce qui produira la surface totale du cilindre.

## DÉMONSTRATION.

Il s'agit uniquement de faire voir que la surface convexe d'un cilindre est égale au produit de la circonférence de l'une de ses bases par sa hauteur. Rappellez-vous que le cercle est un Polygone régulier d'un très grand nombre de côtés si petits, qu'il est impossible de les discerner, mais dont l'existence est néanmoins très réelle. On peut donc supposer que la surface convexe du cilindre est divisée en un très grand nombre de Parallélogrammes rectangles *a b d f* de même hauteur que le cilindre, & si étroits que leur convexité ne differe en rien d'une surface plane (*a*). Or on détermineroit la surface du petit

(*a*) Je prie les Lecteurs délicats de ne point perdre patience. Il y en aura sans doute quelques-uns qui s'ennuieront de nous voir toujours supposer que la circonférence d'un cercle peut être considérée comme un Polygone régulier. Il ne nous est pas possible de les satisfaire encore. Quand nous aurons exposé les principes de la méthode d'*exhaustion*, dont nous ferons usage pour démontrer les Solides, nous sommes persuadés qu'il ne leur restera aucun scrupule à cet égard. J'aurois souhaité pouvoir me dispenser de certaines expressions un peu trop vagues, & qui ne paroissent point devoir être souffertes dans les sciences précises; mais je crai pris cette liberté qu'afin de ne pas jetter d'abord les Commençans dans une trop grande contention: on reconnoîtra bien par la suite que je les ai ménagés sans les flatter.

Parallélogramme rectangle $a\,b\,d\,f$, en multipliant la petite base $f\,d$ par sa hauteur $b\,d = BD$, hauteur du cilindre ; par conséquent comme les petits rectangles $a\,b\,d\,f$, qui composeroient ensemble la surface convexe du cilindre, auroient pour base totale l'une des circonférences des bases circulaires du cilindre, & pour hauteur commune celle du cilindre, il s'ensuit que l'on auroit la surface de tous ces petits Parallélogrammes, c'est-à-dire, la surface convexe du cilindre, en multipliant la circonférence de l'une de ses bases par la hauteur du cilindre, ainsi qu'on l'a exécuté.

348. La Résolution de ce Problême nous fait voir que la surface convexe d'un cilindre est égale à celle d'un Parallélogramme rectangle, dont l'un des côtés seroit égal à la circonférence de l'une des bases circulaires du cilindre, & l'autre côté égal à la hauteur du cilindre.

349. Si l'on faisoit couler le cercle ACB toujours parallelement à lui-même le long de l'axe perpendiculaire FG (*fig.* 120), ce mouvement produiroit encore un cilindre droit, comme ci-dessus (n°. 346). Cette derniere génération du cilindre est fort propre à faire concevoir que ce Solide n'est pas différent du Prisme, dont le plan générateur est un Polygone régulier d'un très grand nombre de côtés, qui réduisent par conséquent la surface convexe du cilindre à une très grande multitude de petits Parallélogrammes plans qui la composent (n°. 347).

350. Si du sommet D d'une ligne élevée perpendiculairement au-dessus de la base ABC, (*fig.* 121.) on imagine une autre ligne DC inclinée, dont l'extrémité C parcoure le Périmetre CBAC, tandis que son autre extrémité est fixée au point D ; le mouvement de cette ligne engen-

drera une surface pyramydale, dont le Solide est appellé *pyramide*.

Puisque toutes les faces de ce Solide vont se réunir en un point, il est évident que la surface de la pyramide n'est composée que de faces triangulaires. On ne fait point ici mention de la base sur laquelle elle s'appuie.

Les différens polygones qui peuvent servir de base à la pyramide, lui donnent différens noms; elle est dite *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonale*, *hexagonale*, *&c.* selon que sa base est un triangle, un quadrilatere, un pentagone, un hexagone, &c.

351. Mais quand la base est un cercle (*fig.* 122.), alors la pyramide est appellée *cône*. La ligne DO menée du sommet D au centre O du cercle, est l'*axe* du cône. Si cet axe est perpendiculaire sur le plan du cercle, le cône est *droit*, autrement il est *scalene* ou *oblique*. La ligne génératrice DC, ou toute autre ligne droite menée du sommet D à un point quelconque de la circonférence de la base, s'appelle le *côté* du cône.

352. Coupez le cône par un plan ST parallele à la base, enlevez-en la partie supérieure DST, il restera la partie inférieure SMCT, que l'on appelle *cône tronqué*.

## PROBLÊME.

353. Mesurer la surface d'une pyramide (*fig.* 121.). Il ne s'agit point de la surface de la base.

## RÉSOLUTION.

1°. Pour avoir la surface d'une pyramide DABC, on prendra la surface de tous les triangles qui entourent cette pyramide.....

On

On observera que la hauteur de ces triangles n'est pas la même que celle de la piramide, qui se mesure par une ligne qui tombe à-plomb du sommet D; au lieu que la hauteur des surfaces triangulaires est une ligne inclinée comme ces faces, & menée perpendiculairement sur un côté du périmètre de la base.

2°. Si la piramide est droite, & que la base soit un Polygone régulier, toutes les faces triangulaires de cette piramide seront égales; elles seront de même hauteur & de même base: on en aura donc la surface totale, en multipliant le circuit ou le périmètre de la base de la piramide par la moitié de la perpendiculaire abbaissée du sommet D sur l'un des côtés du périmètre.

Remarquez que cette perpendiculaire n'est pas différente du côté DC de l'une des faces triangulaires, quand les côtés du Polygone régulier sont très petits; les faces triangulaires deviennent alors si étroites, que la perpendiculaire se confond avec les deux côtés du triangle isoscèle D B C.

## PROBLÊME.

354. Trouver la surface du coné MDC. (*fig.* 122.).

## RÉSOLUTION.

Multipliez la circonférence de la base par la moitié du côté DC de ce cône. Ce produit vous donnera la surface du cone DMC.

## DÉMONSTRATION.

Nous venons d'observer que la base de la piramide étant un Polygone régulier, on en avoit la surface totale, en multipliant le périmètre de sa base par la moitié de la perpendiculaire, abaissée:

du ſommet ſur l'un des côtés du périmètre, & que cette perpendiculaire n'étoit pas différente du côté D C, quand les côtés du Polygone régulier étoient très petits. Or c'eſt-là préciſément le cas d'un cone D M C ; puiſque le cercle eſt un Polygone régulier d'un très grand nombre de côtés, ſi petits que les faces triangulaires du cone deviennent inſenſibles, quoique réellement exiſtantes, ainſi que l'indique le petit triangle D *x y*.

On auroit de même la ſurface du cone, en multipliant la moitié de la circonférence de ſa baſe par ſon côté entier D C.

## *COROLLAIRE I.*

355. Donc, ſi l'on conſtruit un triangle rectangle *d c m* (*fig.* 123.) dont la baſe *c m* ſoit égale à la circonférence de la baſe circulaire du cône, & la hauteur *d c* égale au côté du même cone, ce triangle rectangle ſera égal à la ſurface convexe du cone.

## *COROLLAIRE II.*

356. Par conſéquent en retranchant de la hauteur de ce triangle la partie *d* S, égale à la partie D T du côté du cone, ſi l'on tire S P parallèle à *c m*, cette parallèle S P ſera égale à la circonférence de la baſe du petit cone ſupérieur D S T.

## DÉMONSTRATION.

Conſidérez le cone D M C. (*fig.* 122.) Vous devez vous rappeller que la coupe S T a été faite parallèlement à la baſe circulaire. Ainſi (n°. 279.) D T . T S : : D C . C M, ou D T . D C : : T S . C M. Les lignes T S, C M ſont des diamètres ; les diamètres ſont entr'eux comme leurs circonfé-

rences (n°. 304.); par conſéquent DT eſt à DC, comme la circonférence du diamètre TS eſt à la circonférence du diamètre CM.

Reprenant maintenant le triangle rectangle *dcm* (*fig.* 123.), vous aurez *d*S . *dc* : : SP . *cm*. Or les deux premiers termes *d*S, *dc* de cette proportion, ſont égaux (par la conſt.) aux deux premiers termes DT, DC de la précédente (*fig.* 122.); par conſéquent la circonférence du diamètre TS eſt à la circonférence du diamètre CM : : SP. *cm*; ou, en alternant, la circonférence du diamètre TS. SP : : la circonférence du diamètre CM. *cm*. Mais (ſupp.) la circonférence du diamètre CM = *cm*, baſe du triangle rectangle *dcm*; donc auſſi la circonférence du diamètre TS = SP; C. Q. F. D.

## *COROLLAIRE III.*

357. La ſurface convexe du petit cone DTS (*fig.* 122.) eſt donc égale à la ſurface du petit triangle rectangle *d*SP. (*fig.* 123.) Par conſéquent la ſurface SMCT du cone tronqué eſt égale à la ſurface du Trapèſe P*mc*S, qui a pour hauteur le côté du cone tronqué TC = S*c*, & pour baſe deux lignes parallèles *cm*, SP, égales aux deux circonférences des baſes du cone tronqué, chacune à chacune : car on voit bien qu'en ôtant de grandeurs égales des quantités égales, les reſtes ſont égaux.

## PROBLÊME.

358. Trouver la ſurface d'un cone tronqué SMCT (*fig.* 122.)

## RÉSOLUTION.

Prenez la circonférence du cercle PL également

éloigné des deux baſes circulaires du cone tronqué. Multipliez cette circonférence par le côté C T de ce cone; le produit ſera la ſurface du cone tronqué S M C T.

## DÉMONSTRATION.

La ſurface du cone tronqué S M C T eſt égale à celle du Trapèſe P *m c* S. Or la ſurface du Trapèſe P *m c* S eſt égale à un rectangle de même hauteur, dont la baſe eſt moyenne proportionnelle Arithmétique entre les baſes parallèles P S, *m c* (n°. 324.); & cette moyenne proportionnelle Arithmétique eſt la ligne H L également éloignée des deux baſes, ainſi qu'on l'a fait remarquer au même endroit; par conſéquent la ſurface du cone tronqué = S *c* × H L. Mais (ſupp.) le côté T C du cone tronqué = S *c*. Donc la ſurface du cone tronqué = T C × H L. Or la ligne H L du Trapèſe eſt égale à la circonférence P L qui eſt également éloignée des deux baſes du cone tronqué, parce qu'il a été démontré (n°. 356.), que chaque ligne du triangle rectangle *d c m*, parallèle à ſa baſe *m c*, étoit égale à une circonférence correſpondante du cone. Ainſi la ſurface du cone tronqué = T C × P L; c'eſt-à-dire, que l'on détermine cette ſurface en multipliant le côté T C du cone tronqué par la circonférence P L également éloignée des deux baſes circulaires du cone tronqué; ce qu'il eſt important de remarquer. Nous allons nous ſervir de cette connoiſſance pour déterminer la ſurface de la ſphère.

Au reſte la longueur de cette circonférence de cercle, également éloignée des deux baſes circulaires du cone tronqué, eſt aiſée à trouver. Car, puiſqu'elle eſt moyenne proportionnelle Arithmétique entre les circonférences des baſes circulaires,

la moitié de la ſomme de ces circonférences ſera connoître la longueur cherchée. (n°. 313.)

*Génération de la Sphère.*

359. Soit A B (*fig.* 124.) un diamètre fixe autour duquel le demi cercle A C B faſſe une circonvolution. Le plan de ce cercle engendrera un ſolide rond ou circulaire en tous ſens, auquel on a donné le nom de *Sphère*. Quelquefois on l'appelle un *Globe*. Une balle de paume, une boule ou une bille de billard ſont des Sphères ou des Globes aſſez parfaits.

Tandis que le plan du demi-cercle engendre un ſolide, la demi-circonférence qui le termine, produit une *ſurface ſphérique*. Et ſi l'on regarde la circonférence du cercle comme un Polygone d'un très-grand nombre de côtés fort petits, repréſentés par les petites tangentes S, S, S, &c. cette circonférence décrira une multitude de petites ſurfaces de cones tronqués, dont la totalité n'eſt pas différente de la ſurface entière de la Sphère; enſorte que ſi l'on trouve un moyen d'évaluer les petites ſurfaces des cones tronqués, leſquels enveloppant la Sphère, ſe confondent avec ſa ſurface, il eſt clair que la ſurface totale de la Sphère ſera déterminée.

Avant de paſſer à l'évaluation de la ſuperficie ſphérique, il n'eſt pas hors de propos de faire connoître les noms que l'on donne à certaines parties de la Sphère.

La ligne A B, ſur laquelle le demi-cercle a fait une révolution, eſt appellée l'*axe* de la Sphère; les extrémités A, B de l'axe en ſont les *poles*. Toute ligne qui paſſe par le centre O de la Sphère & qui ſe termine à la ſurface, eſt un *diamètre*. L'axe A B eſt un des diamètres de la Sphère, C D en eſt un autre. Un *grand cercle* de la Sphère eſt celui dont

le plan passe par le centre; les cercles de la Sphère, dont les plans ne passent pas par le centre, sont de *petits cercles*. C O D est le diamètre d'un grand cercle; P M N l'est d'un petit. On appelle *zone* une bande de la surface sphérique comprise entre les circonférences de deux cercles parallèles. Un *segment* de Sphère est une pièce, ou un morceau de Sphère coupé par un plan qui ne passe pas par le centre. Si le plan coupant passoit par le centre, il couperoit la Sphère en deux portions égales, dont chacune est un *hémisphère*. En considérant la Sphère, comme l'assemblage de plusieurs cones qui ont leur sommet au centre & leur base à la surface de la Sphère, un de ces cones détaché, ou seulement indiqué dans la solidité de la Sphère, seroit un *secteur* de Sphère. Enfin on appelle *calotte sphérique* une portion quelconque de la surface de la Sphère.

## PROBLÊME.

360. Déterminer la surface de la Sphère. (*fig.* 125.)

## RÉSOLUTION.

Prenons une des petites tangentes C D, dont la somme compose la demi-circonférence A F B. (Je donne une grande étendue à cette tangente, afin que les lignes qui servent à la Démonstration, ne se confondent pas.) Du point de contingence F abbaissons sur l'axe la perpendiculaire F P. La tangente C D étant prise pour un des petits côtés d'un Polygone régulier, les extrémités C, D de la tangente C D sont également distantes du point de contingence F, & par conséquent la perpendiculaire F P est également éloignée des perpendiculaires C H, D T abbaissées des points C, D sur l'axe A B. De plus, les trois perpendiculaires C H, F P, D T sont parallèles.

Si l'on ſuppoſe, comme ci-deſſus, que le Trapèſe CDTH tourne autour de l'axe immobile AB, le plan de ce Trapèſe engendrera un cone droit tronqué ; le côté CD produira la ſurface convexe de ce cone ; les perpendiculaires CH, FP, DT engendreront des cercles parallèles, dont elles ſeront les rayons.

Afin d'abréger, pour indiquer la circonférence d'un rayon, par exemple du rayon FP, je repréſenterai ce rayon au milieu d'une petite circonférence de cette ſorte $\overset{\frown}{FP}$.

La circonférence $\overset{\frown}{FP}$ eſt donc également éloignée des deux circonférences $\overset{\frown}{CH}$, $\overset{\frown}{DT}$, des baſes circulaires du cone tronqué que nous venons d'engendrer. Or on a la ſurface d'un cone droit tronqué (n°. 358.) en multipliant le côté CD de ce cone par la circonfécence $\overset{\frown}{FP}$ également éloignée des deux baſes du cone tronqué. Donc $CD \times \overset{\frown}{FP}$ eſt l'expreſſion de cette ſurface.

Tirons maintenant la perpendiculaire CS=HT, hauteur du cone tronqué, & le rayon OF de la Sphère ; nous aurons les deux triangles CSD, FPO équiangles. Car 1°. l'angle droit S de l'un eſt égal à l'angle droit P de l'autre. 2°. L'angle

CDS = l'angle FOP, puiſque CDS = CFG, à cauſe du paralléliſme des lignes DT, FP. (ſupp.) Or CFG formé par la tangente CF & par la corde FG, a pour meſure l'arc FA moitié de l'arc FAG (n°. 105.); & l'angle FOP au centre eſt auſſi meſuré par l'arc FA. Donc l'angle FOP = l'angle CFG, qui eſt égal à l'angle CDS; d'où il ſuit que l'angle CDS = l'angle FOP. Donc (n°. 275.) les triangles CSD, FPO ſont équiangles ou ſemblables. Par conſéquent CD.

CS ou HT :: FO . FP :: (FO) . (FP) :

(n°. 304.) ainſi CD . HT :: (FO) . (FP).

Donc CD × (FP) = HT × (FO). Mais nous avons vû ci-deſſus que CD × (FP) étoit l'expreſſion de la ſurface du cone tronqué engendré par la petite tangente CD. Donc HT × (FO), c'eſt-à-dire, la hauteur du cone tronqué multipliée par la circonférence d'un grand cercle de la Sphère, donne auſſi la valeur de la ſurface du petit cone tronqué.

Et comme la même démonſtration s'étend à toutes les ſurfaces des petits cones tronqués qui enveloppent la Sphere (*fig.* 124.), il eſt évident que la ſomme de toutes les hauteurs de ces petits cones

eſt exprimée par l'axe, ou le diamètre A B de la Sphère.

Par conſéquent on a la ſurface totale de ces petits cones tronqués, c'eſt-à-dire, *la ſurface totale de la Sphère, en multipliant ſon diamètre par la circonférence de l'un de ſes grands cercles* (*a*).

## *COROLLAIRE I.*

361. Si l'on circonſcrit un cilindre à la Sphère, c'eſt à dire, ſi l'on enferme une Sphère O M N S (*fig.* 126.) dans un cilindre A B C D, qui touche la Sphère par-tout où il la peut toucher, la ſurface convexe du cilindre circonſcrit ſera égale à celle de la Sphère.

Car le cilindre circonſcrit étant auſſi gros que la Sphère, ſes baſes ſupérieure & inférieure ſont des grands cercles de la Sphère. Or (n°. 347.), on a la ſurface convexe d'un cilindre droit, comme eſt celui-ci, en multipliant la circonférence de l'une de ſes baſes par ſa hauteur M S, c'eſt-à dire, en multipliant la circonférence d'un grand cercle de la Sphère par ſon diamètre. Mais la ſurface de la Sphère ſe détermine avec ces mêmes lignes (n°. 360.); la ſurface de la Sphère eſt donc égale à la ſurface convexe du cilindre qui lui eſt circonſcrit.

## *COROLLAIRE II.*

362. La ſurface de la Sphère eſt quadruple de la ſurface de l'un de ſes grands cercles. Cela eſt

(*a*) Qui pourroit ne pas admirer le génie d'Archimède, Auteur de cette decouverte? Il en fut ſi ſatisfait lui-même, qu'il ſouhaita d'en laiſſer à la poſtérité un monument durable. Il demanda qu'on gravât ſur ſon tombeau un cilindre circonſcrit à une Sphère; parce qu'il n'avoit pas ſeulement déterminé le rapport des ſurfaces de ces deux corps, mais encore celui de leurs ſolides, comme nous le verrons plus bas. L'inſcription de ce tombeau le fit reconoître à Cicéron dans le tems de ſa Queſture en Sicile.

évident : car on a la ſurface d'un des grands cercles de la Sphère, en multipliant ſa circonférence par la moitié du rayon, ou par le quart de ſon diamètre. Mais pour avoir la ſurface totale de la Sphère, on multiplie la circonférence d'un grand cercle par le diamètre entier. La ſurface de la Sphère eſt donc quadruple de l'un de ſes grands cercles.

## *COROLLAIRE III.*

363. Il ſuit auſſi de la réſolution du Problême précédent, que la ſurface de la Zone $x y u z$ (dont on n'a repréſenté ici qu'une partie) eſt égale à un rectangle, qui auroit pour baſe la circonférence d'un grand cercle de la Sphère, & une hauteur égale à la partie de l'axe $n$ T, compriſe entre les deux cercles qui terminent la Zone.

Car la ſurface de cette Zone n'eſt pas différente de la ſomme des ſurfaces des petits cones tronqués qui occuperoient toute ſon étendue. Or on auroit la ſurface totale de ces petits cones tronqués, en multipliant la circonférence d'un grand cercle de la Sphère par la partie $n$ T de l'axe qui exprimeroit leur hauteur totale (n°. 360.); on doit donc évaluer la Zone avec ces mêmes dimenſions.

Par la même raiſon, on trouve que la ſurface de la calotte ſphérique $x$ M $z$ ſe détermine, en multipliant la circonférence d'un grand cercle de la Sphère par la partie M $n$ qui marque la hauteur de la calotte.

## PROBLÊME.

364. Trouver le rapport de la ſurface totale du cilindre à celle de la Sphère inſcrite à ce cilindre (*fig.* 126.).

## RÉSOLUTION.

Nous avons vû (n°. 361.) que la ſurface de la

Sphère étoit égale à la ſurface convexe d'un cilindre circonſcrit, & (n°. 362.) que cette ſurface ſphérique valoit quatre de ſes grands cercles; mais outre ſa ſurface convexe, le cilindre circonſcrit a encore deux baſes, dont chacune eſt égale à un grand cercle de la Sphère; la ſurface totale du cilindre eſt donc égale à ſix grands cercles de la Sphère: ainſi la ſurface du cilindre circonſcrit eſt à celle de la Sphère comme 6 eſt à 4. Or 6 . 4 :: 3 . 2; par conſéquent la ſurface du cilindre circonſcrit eſt à la ſurface de la Sphère, comme 3 eſt à 2; c'eſt-à-dire, que *la ſurface de la Sphère n'eſt que les* $\frac{2}{3}$ *de la ſurface totale du cilindre circonſcrit.*

## PROBLÊME.

365. Déterminer le rapport des ſurfaces des corps ſemblables.

## RÉSOLUTION.

Les *corps ſemblables* ſont ceux qui ont des baſes, des faces & des inclinaiſons ſemblables; les ſurfaces de ces corps ſont donc compoſées de figures ſemblables, chacune à chacune. Or (n°. 306.) les figures ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues. Par conſéquent *les ſurfaces des corps ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.*

## COROLLAIRE.

366. Ainſi les ſurfaces des Sphères ſont entr'elles comme les quarrés de leurs diamètres, ou comme les quarrés de leurs rayons: car les Sphères ſont des ſolides ſemblables, dont les diamètres ou les rayons ſont des lignes homologues. Cependant, voici comment l'on peut détailler la Démonſtration de ce Corollaire.

Soient S, *s* les surfaces de deux Sphères que l'on va comparer; C, *c*, les circonférences de leurs grands cercles; D, *d*, leurs diamètres.

Il a été démontré (n°. 360.) que la surface d'une Sphère étoit égale au produit de la circonférence d'un grand cercle par son diamètre, donc S = C D; & $s = c\,d$. Ainsi S . *s* : : C D . *c d*, ou $\frac{S}{s} = \frac{CD}{c\,d}$. Mais (n°. 305.), les circonférences des cercles sont entr'elles comme leurs diamètres; par conséquent C . *c* : : D . *d*, ou $\frac{C}{c} = \frac{D}{d}$; donc $\frac{CD}{c\,d} = \frac{DD}{d\,d}$. On peut donc mettre dans l'équation précédente $\frac{DD}{d\,d}$ à la place de $\frac{CD}{c\,d}$, & l'on aura $\frac{S}{s} = \frac{DD}{d\,d}$, ou S . *s* : : D D . *d d*; c'est-à-dire, que *les surfaces des Sphères sont entr'elles, comme les quarrés de leurs diamètres, ou comme les quarrés de leurs rayons*, parce que les diamètres sont entr'eux comme les rayons.

Ainsi une Sphère de 1 pied de rayon auroit 36 fois moins de surface qu'une Sphère de 6 pieds de rayon, puisque les surfaces de ces sphères seroient entr'elles comme le quarré de 1 est au quarré de 6, ou comme 1 est à 36.

# CHAPITRE II.

## DE LA SOLIDITÉ DES CORPS.

### *Principes & vérités ſur leſquels on en fonde l'Evaluation.*

367. POUR évaluer la ſolidité des corps, les Modernes ont imaginé des principes avec leſquels on réſout avec une extrême facilité tous les Problêmes que l'on peut propoſer ſur cette matière. Il eſt vrai que les Anciens, & principalement Archimède, nous en ont laiſſé tout le fond. Mais la théorie en a paru ſi profonde à nos Modernes, ou peut-être même ſi difficile, qu'ils ont jugé plus commode de chercher un nouveau chemin, que de ſuivre celui qui étoit découvert.

Bonaventure Cavalieri, Milanois, Religieux de l'Ordre des Jéſuites, publia en 1635 ſa *Géométrie des Indiviſibles.* Il y règne un principe qui a été adopté par le plus grand nombre des Géomètres qui ſont venus après lui. Ce principe conſiſte à regarder les Solides comme un aſſemblage de petits plans élémentaires ſi minces, que leur épaiſſeur ne puiſſe plus diminuer; c'eſt ce qui les a fait appeller *Indiviſibles.* On a déterminé le nombre de ces plans élémentaires par la perpendiculaire qui meſure la hauteur des Solides qui en ſont compoſés; enſorte que, à baſes égales, on a compté un plus grand nombre d'élémens à proportion que les hauteurs des Solides ont été plus grandes.

Quand, dans la comparaiſon de deux ſolides, on a trouvé les élémens d'une part égaux aux élé-

mens de l'autre part, chacun à chacun, & de plus, un pareil nombre d'élémens de chaque côté, on a conclu que les Solides, auxquels appartenoient ces élémens, étoient égaux.

Figurez-vous donc que le petit plan élémentaire M de la piramide C M (*fig.* 127.) soit retréci continuellement par les côtés de la piramide, entre lesquels il monte perpendiculairement & parallèlement à lui-même, jusqu'à ce qu'il soit réduit à rien au point C; il paroît que ce petit plan M engendreroit un corps précisément égal & semblable à la piramide C M.

Si l'on imagine de même que le plan P élémentaire coule parallèlement à lui même le long de la ligne oblique L E, & qu'il soit diminué continuellement par les côtés de la piramide oblique E P de même hauteur que la piramide C M; on conçoit aussi qu'il engendreroit un corps égal à la piramide E P, dont le nombre des élémens seroit égal au nombre des élémens de la piramide C M. Nous allons considérer les Solides sous ce point de vue de génération, nous réservant d'en apprécier la valeur, quand nous aurons fait connoître son application.

On doit se rappeller qu'un plan est une surface, dont aucunes des parties ne s'élèvent au-dessus des autres : elle est sans aucunes inégalités; ainsi l'on peut tracer des lignes droites sur un plan. On appelle *commune section* de deux plans M S, D P, (*fig.* 128.) l'étendue O L, dans laquelle ces plans s'entrecoupent.

## PROPOSITION PREMIÈRE.

368. La commune section O L (*fig.* 128.) de deux plans quelconques M S, D P, est nécessairement une seule ligne droite.

## DÉMONSTRATION.

Prenons les deux extrémités O, L de la commune section. Il est certain que du point O au point L, on peut mener une ligne droite sur le plan MS; on en peut aussi mener une entre les deux mêmes points sur le plan PD, puisque les deux points O, L sont dans l'un & l'autre plan. Or deux lignes droites qui ont les mêmes extrémités, ne sont qu'une seule & même droite : ainsi la droite OL appartient à l'un & à l'autre plan; mais elle ne peut être commune que dans l'étendue où ces plans se rencontrent; la mutuelle rencontre, ou la commune section de deux plans est donc nécessairement une seule ligne droite; C. Q. F. D.

Mais une seule ligne droite n'est pas nécessairement la commune section de deux plans; c'est pourquoi la converse est fausse.

Deux plans sont appellés *parallèles*, quand toutes les perpendiculaires abbaissées de l'un sur l'autre sont égales.

### PROPOSITION II.

369. Deux plans parallèles, coupés par un troisième plan, donnent des sections parallèles rectilignes (*fig.* 129.).

## DÉMONSTRATION.

Soient les deux plans AB, CD, parallèles, coupés par un troisième plan OT ou PG perpendiculaire ou oblique à ces deux plans; je dis que dans l'un & l'autre cas, les communes sections OP, LT, ou OP, GF, sont des lignes droites parallèles.

1°. Ce sont des lignes droites (Prop. I. n°. 368.).

2°. Si le plan coupant OT est perpendiculaire, on aura la perpendiculaire OL = la perpendicu-

laire PT; ainſi les deux ſections OP, LT étant deux lignes droites, dont tous les points de l'une ſont à égale diſtance de tous les points de l'autre dans le même plan OT, il eſt néceſſaire que ces deux lignes ſoient parallèles.

Mais ſi le plan coupant PG étoit oblique ou incliné aux deux plans AB, CD, cela n'empêcheroit pas que les ſections OP, GF ne fuſſent parallèles. Car, imaginez que les ſections OP, GF ſoient des charnières ſur leſquelles les plans AB, CD puiſſent tourner, on pourra faire par ce moyen que les plans AB, CD ſoient perpendiculaires au plan coupant PG, ou, ce qui revient au même, que le plan coupant PG ſoit perpendiculaire aux deux plans AB, CD, ſans que les communes ſections OP, GF aient changé : or nous venons de voir que ces communes ſections étoient parallèles, lorſqu'elles ſont faites par un plan coupant perpendiculaire; donc puiſque, le changement d'inclinaiſon du plan coupant ne fait point varier les ſections, elles reſteront encore parallèles, quelque inclinaiſon que le plan coupant puiſſe prendre. Par conſéquent deux plans parallèles coupés par un troiſième plan quelconque, donnent des ſections parallèles rectilignes; C. Q. F. D.

Il n'eſt pas beſoin d'avertir que la converſe de cette Propoſition eſt fauſſe.

## PROPOSITION III.

370. Si une pyramide quelconque CM (*fig.* 127.) eſt coupée par un plan parallèle à ſa baſe M, non-ſeulement il en naîtra une coupe *m* parallèle au plan M de la baſe, mais toutes les lignes, qui forment le contour de cette coupe, ſeront parallèles à toutes les lignes du périmètre de la baſe M, chacune à leur correſpondante.

DÉMONS-

## DÉMONSTRATION.

1°. La coupe *m* eſt parallèle, parce que le plan coupant eſt parallèle (ſupp.).

2°. Chaque côté *df* eſt parallèle à ſon correſpondant D F. Car remarquez que les côtés *df*, D F ſont les communes ſections des deux plans *m*, M parallèles, coupés par le troiſième plan C D F, qui eſt une des faces de la piramide : ainſi les communes ſections *df*, D F ſont parallèles (Prop. 2. n°. 369.). Appliquez cette même démonſtration à tous les côtés correſpondans, & il eſt évident que tous les côtés du périmètre de la coupe *m*, parallèle à la baſe M, ſeront parallèles à tous les côtés du contour de la baſe M, chacun à ſon correſpondant; C. Q. F. D.

On voit que la converſe de cette Propoſition eſt vraie; il ſuffit d'en avertir.

### PROPOSITION IV.

371. La coupe *m* parallèle à la baſe M de la Piramide, eſt un polygone ſemblable à cette baſe (*fig.* 127.).

## DÉMONSTRATION.

1°. Tous les côtés de la coupe *m* ſont proportionnels à tous les côtés de la baſe M, chacun à chacun. Car, puiſque (Prop. 3. n°. 370.) *df* eſt parallèle à D F, & *pd* parallèle à P D, &c. on aura D F. *df* :: C D. *cd* :: D P. *dp*; ainſi D F. *df* :: D P. *dp*. En continuant à comparer de la même façon tous les côtés correſpondans, on verra que tous les côtés de la coupe *m* ſont proportionnels à tous les côtés de la baſe M, chacun à chacun.

2°. Il reſte donc à démontrer que les angles correſpondans ſont égaux, chacun à chacun; par exemple, que l'angle $p\,d\,f$ = P D F. Imaginez le plan C F P, lequel paſſant par les côtés C F, C P, coupe les deux plans $m$, M, & donne les communes ſections $f\,p$, F P parallèles; & vous aurez (conſt.) $f\,p$. F P :: $c\,p$. C P :: $p\,d$. P D :: $c\,d$. C D :: $d\,f$. D F; donc $f\,p$. F P :: $p\,d$. P D :: $d\,f$. D F; & par conſéquent, les trois côtés du triangle $f\,d\,p$ étant proportionnels aux trois côtés du triangle F D P, chacun à chacun, les angles $p\,d\,f$, P D F, oppoſés aux côtés homologues $f\,p$, F P, ſont égaux (par la converſe du n°. 283.). Dites la même choſe des autres angles correſpondans, & alors, il paroîtra que la baſe M a non-ſeulement tous ſes côtés proportionnels aux côtés de la coupe $m$, chacun à chacun; mais encore que les angles de l'une ſont égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun; par conſéquent ces deux plans ſont des polygones ſemblables; C. Q. F. D.

## *REMARQUE.*

Nous avons déja averti que les figures différentes du triangle pouvoient être équiangles, ſans avoir leurs côtés proportionnels, & réciproquement qu'elles pouvoient avoir leurs côtés proportionnels, ſans être équiangles; c'eſt pourquoi, afin que les figures qui ont plus de trois côtés ſoient ſemblables, il faut qu'elles ſoient en même tems équiangles, & que les côtés de l'une ſoient proportionnels aux côtés de l'autre, chacun à chacun : or il peut arriver que deux figures ſoient équiangles, quoiqu'elles n'aient pas leurs côtés proportionnels.

Car, ſuppoſez que les côtés de l'héxagone régulier A B C D E F (*fig.* 168. *pl.* 20.) ſoient dou-

bles des côtés de l'héxagone régulier *abcdef*, il eſt clair que ces deux figures ſont ſemblables, c'eſt à dire, que tous les angles de l'une ſont égaux à tous les angles de l'autre, chacun à chacun, & que les côtés de l'une ſont proportionnels aux côtés de l'autre; mais ſi l'on prolonge les côtés C D, F E, & qu'en un point quelconque O de l'un des prolongemens l'on tire O M parallèle au côté D E, on voit que la figure A B C O M F eſt équiangle à la figure *abcdef*, & cependant elle ne lui eſt pas ſemblable. Ainſi des figures peuvent être équiangles, ſans avoir leurs côtés proportionnels, chacun à chacun.

Réciproquement deux figures peuvent avoir tous leurs côtés proportionnels, ſans être équiangles. Conſidérez les deux hexagones réguliers A B C D F G, *abcdfg* (*fig.* 169. *pl.* 20.): ces figures ſont équiangles; mais faites B R = B C, G T = G F, & des points R, T, avec le rayon B R ou G T, décrivez deux arcs qui ſe coupent au point S, afin d'avoir les côtés R S, T S égaux au côté du grand hexagone; il eſt clair que les côtés de la nouvelle figure A B R S T G ſont proportionnels aux côtés de la petite figure *abcdfg*, & que cependant les angles de l'une ne ſont pas égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun. C'eſt pourquoi, afin que l'on puiſſe démontrer que les figures ſont ſemblables, il faut non ſeulement que les côtés de l'une ſoient proportionnels aux côtés de l'autre, mais encore que les angles de l'une ſoient égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun.

## PROPOSITION V.

372. Les piramides C M, E P (*fig.* 127.) de même baſe & de même hauteur, ſont égales en ſolidité; ou, ce qui eſt la même choſe, deux pyra-

mides, dont les baſes M, P ſont égales, ont auſſi une égale ſolidité, lorſqu'elles ſont d'ailleurs ſituées entre les mêmes plans parallèles CE, DL.

## DÉMONSTRATION.

Suppoſons donc que la baſe M de la piramide hexagonale CM ſoit égale en ſurface à la baſe P de la piramide quarrée EP de même hauteur : ſi l'on coupe l'une & l'autre piramide par un plan parallèle aux baſes, cette coupe fera voir les deux petits plans élémentaires *m*, *p* ſemblabes à leur baſe correſpondante (Prop. 4. n°. 371.) ; & en imaginant que l'on faſſe de ſemblables ſections dans tout l'intervalle des parallèles CE, DL, on réduiroit l'une & l'autre piramide en un même nombre de petits plans élémentaires ; enſorte que, ſi l'on démontre que chaque élément d'une piramide eſt égal à chaque élément correſpondant de l'autre piramide, on aura démontré que toutes les parties qui compoſent une piramide, ſont égales à toutes les parties de l'autre, chacune à chacune, & qu'ainſi les deux piramides ſont égales.

Il faut donc prouver que l'élément *m* eſt égal à l'élément *p* correſpondant. Tirez CG, & à cauſe des parallèles CE, *dl*, DL (ſupp.) rappellez vous que (n°. 283.) DF. *df* :: CD. *cd* :: CG. CO :: EG. *Eg* :: GL. *gl*. Donc DF. *df* :: GL. *gl*; ainſi (n°. 254.) $\overset{2}{\text{DF}}.\overset{2}{df} :: \overset{2}{\text{GL}}.\overset{2}{gl}$. Mais (Prop. 4. n°. 371.) le plan M eſt ſemblable au plan *m*, & le plan P ſemblable au plan *p*. Ainſi, puiſque les figures ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues, (n°. 306.) $\text{M}.m :: \overset{2}{\text{DF}}.\overset{2}{df}$, & $\text{P}.p :: \overset{2}{\text{GL}}.\overset{2}{gl}$. Les deux derniers rapports de ces proportions ſont égaux ;

les deux premiers le ſont donc auſſi, par conſéquent M. $m$ :: P. $p$ ; ou, en alternant, M. P :: $m$. $p$. Mais (par la ſupp.) M = P. Donc auſſi $m = p$ ; c'eſt-à-dire, que l'élément de la piramide hexagonale eſt égal à l'élément correſpondant de la piramide quarrée. C'eſt la même démonſtration à l'égard des autres éléments. Ainſi la ſomme des éléments de la piramide hexagonale eſt égale à la ſomme des éléments de la piramide quarrée, & d'ailleurs le nombre de ces éléments eſt égal de part & d'autre. Par conſéquent les piramides de même baſe & de même hauteur ſont égales ; C. Q. F. D.

La converſe de cette propoſition eſt fauſſe.

C'eſt ainſi que Cavalieri applique ſon principe des indiviſibles à la démonſtration de vérités découvertes depuis plus de deux mille ans ; mais par une théorie plus difficile, de l'aveu de tous les Géomètres, & plus rigoureuſe, ſelon quelques-uns.

Nous avons promis de nous expliquer ſur cette opinion. On verra notre penſée, que nous renvoyons plus loin, afin que nos Lecteurs aient le tems d'y réfléchir.

## *COROLLAIRE.*

373. Les Cones étant des piramides régulières d'un très-grand nombre de petites faces inſenſibles, il s'enſuit que les Cones ſont non ſeulement égaux en ſolidité aux Cones, mais encore aux piramides de même hauteur & de baſe égale.

## PROPOSITION VI.

373. On peut toujours diviſer un priſme droit triangulaire en trois piramides triangulaires égales:

## DÉMONSTRATION.

Soit le prisme droit triangulaire ABCDFG (*fig.* 130.) appuyé sur une de ses faces parallélogrammes ACDG. (On doit s'imaginer que les points B, F sont relevés, & pour concevoir facilement tout ce que l'on va dire, il est à propos d'avoir en main un prisme triangulaire coupé ainsi que nous allons l'expliquer.) Coupez la face ACDG par la diagonale CG, & les deux faces ABFG, CBFD, qui sont en talus, par les diagonales BG, BD, partant du même point B; & considérez d'abord les deux piramides BGFD, GABC. En supposant que le sommet de la piramide BGFD soit en B, sa base sera le triangle GFD, & sa hauteur la ligne BF; parceque BF est perpendiculaire sur le plan du triangle GFD. De même, en prenant le point G pour le sommet de la piramide GABC, sa base sera le triangle ABC, égal au triangle GFD (par la nature du prisme triangulaire), & sa hauteur sera la ligne GA = BF, à cause que AG est perpendiculaire sur le plan du triangle ABC. Les deux piramides BGFD, GABC ont donc des hauteurs & des bases égales; elles sont par conséquent égales en solidité. (Prop. 5. n°. 372.)

Il y a une troisième piramide qu'il n'est pas facile de démêler sur la figure. Afin de l'imaginer plus aisément, enlevons la piramide BGFD de la figure I. Ne considérons plus que la figure II d'où cette piramide a disparu, & au lieu de prendre le point G pour le sommet de la piramide GABC, comme nous avons fait dans la premiere comparaison, prenons son sommet au point B, en la considérant appuyée sur la base GCA. Cela posé, tâchez de discerner une troisième piramide.

CDGB, dont les faces rampantes vont se réunir au point B qui en est par conséquent le sommet, & dont la base est le triangle CDG égal au triangle GCA.

Les deux piramides GABC, CDGB ayant même sommet B, & les bases GCA, CDG égales & dans le même plan, parce que la diagonale GC divise le parallélogramme ACDG en deux parties égales; c'est une nécessité (n°. 372.) que la piramide GABC ait la même solidité que la piramide CDGB; mais il a été prouvé que la piramide GABC a aussi la même solidité que la piramide BGFD; par conséquent les trois piramides BGFD, GABC, CDGB, qui composent la totalité du prisme, sont égales. On peut donc diviser un prisme triangulaire en trois piramides égales; C. Q. F. D.

Cette Proposition n'a point de converse.

### *COROLLAIRE.*

375. On voit bien que la même démonstration s'étend aux prismes triangulaires inclinés; par conséquent une piramide triangulaire, ou un cone, n'est que le tiers d'un prisme triangulaire de même base & de même hauteur.

### PROPOSITION VII.

376. Les prismes triangulaires ABCFGD, *abcfgd* (*fig.* 131.), dont les bases ABC, *abc* sont égales, & qui ont même hauteur, ou qui sont posés entre les mêmes plans parallèles D*f*, A*c*, ont aussi une solidité égale, soit que ces prismes soient tous deux droits, ou tous deux obliques, ou enfin que l'un soit droit & l'autre incliné.

### DÉMONSTRATION.

Tirez les lignes GA, GC, d'une part, & de

l'autre les lignes *g a*, *g c*; afin d'avoir les deux piramides G A B C, *g a b c*, de même base & de même hauteur. (Il faut se représenter les points G, *g* relevés).

Par la Proposition 6 (n°. 374.) tout prisme triangulaire peut être divisé en trois piramides égales. Ainsi le prisme A B C F G D contient trois piramides égales, dont G A B C en est une. De même le prisme *a b c f g d* est composé de trois piramides égales, entre lesquelles on voit la piramide *g a b c*. Or la piramide G A B C est égale en solidité à la piramide *g a b c* de même base & de même hauteur (n°. 372.). Donc les trois piramides du prisme triangulaire A B C F G D sont égales aux trois piramides, dont est composé le prisme triangulaire *a b c f g d*; par conséquent ces deux prismes sont égaux en solidité; C. Q. F. D.

La converse de cette Proposition est fausse.

## PROPOSITION VIII.

377. Un parallélipipède A B C D F G H M est toujours égal à un autre parallélipipède *a b c d f g h m* de même base & de même hauteur (*fig.* 132.).

## DÉMONSTRATION.

Coupez le premier parallélipipède par le plan diagonal B D M G : il est évident que ce parallélipipède sera divisé en deux prismes triangulaires A B D F G M, B D C G M H égaux, puisqu'ils ont même hauteur & des bases égales (Prop. 7.). Par la même raison, le plan diagonal *b d m g* divisera le second parallélipipède en deux prismes triangulaires *a b d f g m*, *b d c g m h* égaux. Mais, on a supposé dans la Proposition que la base F G H M du premier étoit égale à la base *f g h m* du second;

par conſéquent les moitiés de la premiere baſe, c'eſt-à-dire, les triangles FGM, MGH ſont égaux aux moitiés de la ſeconde baſe, ou aux triangles *fgm*, *mgh*, chacun à chacun. Or, ces triangles ſont les baſes des priſmes triangulaires de part & d'autre; par conſéquent (Prop. 7.) les deux priſmes triangulaires du premier parallélipipède ſont égaux aux deux priſmes triangulaires qui compoſent le ſecond. Il faut donc conclure que les parallélipipèdes droits ou inclinés de même baſe & de même hauteur ſont égaux en ſolidité; C. Q. F. D.

## PROPOSITION IX.

378. Un priſme polygone quelconque droit, ou oblique, c'eſt à-dire, un priſme dont la baſe eſt un polygone quelconque, eſt égal en ſolidité à tout autre priſme polygone de même baſe & de même hauteur.

## DÉMONSTRATION.

Car toute baſe polygone peut être changée en baſe parallélogramme de même ſurface, (n°. 322.) ce qui transforme les priſmes polygones en parallélipipèdes de même baſe & de même hauteur. Or, ces parallélipipèdes ſont égaux en ſolidité (n°. 377.). Donc auſſi les priſmes polygones quelconques de même baſe & de même hauteur ſont égaux.

## *COROLLAIRE I.*

379. Les cilindres ſont des priſmes polygones. Ainſi les cilindres de même baſe & de même hauteur ſont égaux en ſolidité.

## *COROLLAIRE II.*

380. Un priſme polygone quelconque eſt tou-

jours le triple d'une piramide polygone quelconque de même baſe & de même hauteur.

Car, de même que l'on peut transformer tout priſme polygone en une parallélipipède de même baſe & de même hauteur (n°. 378.), on le peut auſſi transformer en un priſme triangulaire de même baſe & de même hauteur. Dites la même choſe de la piramide polygone, qui peut devenir triangulaire ſans changer de ſolidité; puiſqu'il ſuffit pour cela de transformer en triangle la baſe polygone de ces ſolides, ce qui eſt toujours poſſible. Or, un priſme triangulaire eſt toujours le triple d'une piramide triangulaire de même baſe & de même hauteur (n°. 375); par conſéquent un priſme polygone quelconque eſt toujours le triple d'une piramide polygone quelconque de même baſe & de même hauteur.

## *COROLLAIRE III.*

381. On ſçait qu'un cilindre eſt un priſme polygone, & qu'un cone n'eſt pas différent d'une piramide polygone; il eſt donc évident qu'un cilindre a trois fois plus de ſolidité qu'un cone ou qu'une piramide de même baſe & de même hauteur; ou, ce qui revient au même, qu'un cone ou une piramide n'eſt que le tiers d'un cilindre ou d'un priſme de même baſe & de même hauteur.

382. La meſure effective des ſolides eſt entièrement fondée ſur les Propoſitions & les Corollaires précédens. Mais pour meſurer, il faut néceſſairement convenir d'une certaine quantité, qui ſoit un modèle d'évaluation, ou une meſure à laquelle on rapporte toutes les autres meſures.

Dans les Livres précédens, les lignes ou les longueurs ont ſervi de meſures aux longueurs ou aux diſtances, les ſurfaces aux ſurfaces; il faut donc que

les solides soient mesurés par des solides. Les mesures invariables les plus simples sont les plus commodes. Le cube est un solide, dont toutes les dimensions sont égales, toutes les faces égales, tous les angles égaux & invariables. Ainsi le cube est le modèle d'évaluation le plus naturel de tous les solides.

Une *toise cube* est donc un solide qui a une toise en longueur, une toise en largeur, & une toise en profondeur ou en épaisseur. De même le *pied cube* est un solide, dont les trois dimensions valent chacune un pied. Entendez la même chose du *pouce cube*, de la *ligne cube*, du *point cube*.

## PROBLÊME.

383. Trouver la solidité d'un parallélipipède droit, haut de trois toises sur une base dont la longueur A B = 6 toises, & la largeur B C en vaut 4 (*fig.* 133.).

## RÉSOLUTION.

Multipliez les trois dimensions de ce prisme les unes par les autres, c'est-à-dire, prenez d'abord l'aire de la base en multipliant 6 par 4 = 24. Multipliez ensuite ce produit 24 par 3) le produit 72 indiquera que le prisme proposé contient 72 toises cubes.

## DÉMONSTRATION.

Il est d'abord évident que l'aire de la base = 24 toises quarrées. Coupez maintenant la hauteur B D de ce prisme par des plans horisontaux, qui le divisent en autant de parallélipipèdes, hauts d'une toise, qu'il y a de toises dans la hauteur ; vous aurez trois tranches, dont chacune contiendra 24 cubes égaux au cube *a b d c f g* qui représente une toise cube ; & par conséquent on trouvera le nombre de tous les

cubes, qui composent le prisme proposé, en multipliant 24 par trois, ce qui produira 72 toises cubes, ainsi qu'on l'avoit d'abord indiqué; C. Q. F. D.

## *COROLLAIRE I.*

384. Comme on peut transformer un prisme quelconque en un parallélipipède qui lui soit égal en solidité, on voit que l'on déterminera toujours la solidité d'un prisme quelconque, en faisant le produit de ses trois dimensions, longueur, largeur, épaisseur. Tout ce qu'il faut observer dans les prismes obliques, c'est que les trois dimensions soient toujours prises perpendiculairement; parce que les prismes obliques étant égaux à des prismes droits de même base & de même hauteur, & la solidité des prismes droits se déterminant par des perpendiculaires (n°. 383.), il faut bien que ce soient des perpendiculaires qui déterminent aussi les dimensions des prismes obliques.

## *COROLLAIRE II.*

385. Un cube contient donc 216 pieds cubes: car les trois dimensions perpendiculaires de la toise cube contiennent chacune six pieds; & par conséquent (n°. 383.) on aura pour sa valeur en pieds cubes $6 \times 6 \times 6 = 216$ pieds cubes.

Suivant le même principe, le pied cube contenant 12 pouces en long, 12 pouces en large, & 12 pouces en hauteur, contiendra en solidité $12 \times 12 \times 12 = 1728$ pouces cubes.

De même le pouce cube = 1728 lignes cubes; enfin la ligne cube = 1728 points cubes.

Il est nécessaire de sçavoir par cœur ces mesures cubiques; c'est pourquoi j'en donne une Table, afin qu'on y ait recours au besoin.

386. *TABLE DES MESURES cubiques les plus uſitées.*

| | |
|---|---|
| La toiſe cube contient | 216 pieds cubes, ou 373248 pouces cubes. |
| Le pied cube contient | 1728 pouces cubes, ou 2985984 lignes cubes. |
| Le pouce cube contient | 1728 lignes cubes, ou 2985984 points cubes. |
| La ligne cube contient | 1728 points cubes. |

On fait uſage dans l'Arpentage de la perche quarrée, & de l'arpent qui vaut 100 perches quarrées, dont chacune = 9 toiſes quarrées, meſure de Paris; mais pour toiſer les ſolidités, on ne ſe ſert point d'arpens cubes, ni de perches cubes. Le toiſé des ouvrages ordinaires ne demande point des meſures auſſi énormes.

## PROBLÊME.

387. Déterminer la ſolidité d'une piramide ou d'un cone quelconque.

## RÉSOLUTION.

Evaluez d'abord ſa baſe en meſures quarrées, multipliez cette valeur par la hauteur de la piramide, & prenez le tiers de ce produit; il vous donnera la ſolidité de la piramide ou du cone propoſé.

## DÉMONSTRATION.

On a la ſolidité d'un priſme quelconque, en prenant le produit entier de ſes trois dimenſions (n°. 384), ou, ce qui eſt la même choſe, en multipliant ſa baſe par ſa hauteur. Mais une piramide

ou un cone eſt toujours le tiers d'un priſme de même baſe & de même hauteur (n°. 375.) ; par conſéquent on ne prendra pour la ſolidité d'une piramide ou d'un cone, que le tiers du produit de ſa baſe par ſa hauteur. Soit, par exemple, une piramide droite quadrangulaire, élevée de 40 toiſes au-deſſus de ſa baſe, dont la longueur = 10 toiſes, & la largeur en contient 6. Vous en déterminerez la ſolidité, en multipliant 6 par 10 = 60, valeur de la baſe, que vous multiplierez enſuite par 40, & vous aurez 60 × 40 = 2400, dont le tiers = 800, ſera la valeur en toiſes cubes de la piramide propoſée.

Que la piramide ſoit droite ou oblique, cela n'y fait rien, parcequ'il a été démontré (n°. 372.) qu'une piramide oblique étoit toujours égale en ſolidité à une autre piramide droite de même baſe & de même hauteur.

## PROBLÊME.

388. Trouver la ſolidité du cone droit tronqué ABCD, dont on connoît les circonférences ou les diamètres AB, CD des baſes, & le côté AC ou BD. (*fig.* 134.)

## RÉSOLUTION.

Continuez les deux côtés AC, BD, juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent au point S, afin d'avoir le cône parfait SAB.

On auroit évidemment la ſolidité du cone tronqué ABCD, en ôtant le petit cone SCD du grand cone SAB ; ainſi le Problême ſe réduit à connoître la ſolidité des deux cones. Mais je remarque que tout ſeroit connu, ſi l'on déterminoit CS ; parceque les hauteurs SG, S*g* des deux cones, appartiennent aux triangles rectangles SGA,

S $g$ C, dans chacun desquels on connoîtroit alors une hypothénuse & un côté, d'où l'on déduiroit facilement le troisième côté (n°. 295.) qui exprime ici la hauteur des cones.

Tâchons donc de connoître C S par les données du Problême, & tout sera résolu. Considérons les triangles semblables S A B, S C D; nous aurons A B . C D : : A S . C S; donc (n°. 251.) A B — C D. C D : : A S — C S ou A C. C S. Or les trois premiers termes de cette dernière proportion sont donnés : car A B — C D est la différence des deux diamètres A B, C D donnés; par conséquent le quatrième terme C S de cette proportion est connu (n°. 247.).

Il n'en faut pas davantage pour déterminer la hauteur de l'un & l'autre cone, puisque, 1°. C S étant connu & A C donné, A S sera entiérement déterminé. Dans le triangle rectangle S A G on connoîtra donc l'hypothénuse A S, & le côté A G; ainsi la hauteur S G du grand cone est déterminée (n°. 295.).

2°. On connoît aussi, dans le petit triangle rectangle S C $g$, l'hypothénuse C S, & le côté C $g$, d'où l'on déduit la hauteur S $g$ du petit cone.

Les bases & les hauteurs des deux cones étant déterminées, on en trouvera la solidité (n°. 387.), après quoi il ne s'agira plus que de retrancher la petite solidité de la plus grande, & ce qui restera donnera la solidité du cone tronqué; C. Q. F. T. & D.

## AUTRE SOLUTION

Assez commode dans la pratique, pour trouver la solidité d'un cone ou d'une piramide tronquée, indépendamment de la hauteur S $g$ du petit cone enlevé.

Vous trouverez que cette ſolidité eſt toujours égale à la ſomme des ſolidités de trois cones entiers, de même hauteur que le tronqué, & dont le premier auroit pour baſe le cercle inférieur, le ſecond le cercle ſupérieur, & le troiſième une baſe moyenne Géométrique entre le cercle ſupérieur & l'inférieur du cone tronqué, dont on recherche la meſure (*fig.* 134.).

## I. DÉMONSTRATION.

Soit $\frac{A\ B}{4} = R$, circonf. $A\,B = C$, $\frac{C\ D}{4} = r$, circonf. $C\,D = c$, $G\,g = h$. Alors la baſe du premier cone $= CR$; celle du ſecond $= cr$; & pour avoir la baſe $m$ du troiſième, on fera $C\,R . m :: m . cr$; d'où l'on aura $m^2 = C\,r\,c\,R$ : mais comme on a $C . c :: R . r$, (304.) & par conſéquent $C\,r = c\,R$; il s'enſuit que $m^2 = C^2\,r^2$, & que $m = C\,r$; la baſe du troiſième cone ſera donc $= C\,r$. Par conſéquent la ſolidité du premier cone $= C\,R \times \frac{h}{3}$ (387.); celle du ſecond $= cr \times \frac{h}{3}$, & celle du troiſième $= C\,r \times \frac{h}{3}$; de manière que ces trois ſolidités réunies $= \overline{CR + cr + Cr} \times \frac{h}{3}$. Il faut donc faire voir que la ſolidité du cone tronqué que l'on cherche $= \overline{CR + cr + Cr} \times \frac{h}{3}$.

II. Pour y parvenir, recherchons cette ſolidité ſuivant la manière précédente, où l'on a fait uſage du petit cone ſupérieur, dont la hauteur $S\,g$ ſoit faite $= x$, & par conſéquent la hauteur $G\,S$ du cone entier $= h + x$, & l'on aura [à cauſe des triangles ſemblables $A\,G\,S$, $C\,g\,S$]

R.

$R . r :: h + x . x$; &, en ſouſtrayant, $R - r . r :: h . x$; donc $x = \frac{hr}{R-r}$ ſera l'expreſſion de la hauteur du petit cone ſupérieur; & la hauteur G S ſera $= h + \frac{hr}{R-r}$ [en donnant la même dénomination] $= \frac{hR-hr+hr}{R-r}$, laquelle devient $\frac{hR}{R-r}$. Ainſi, puiſque la hauteur G S du grand cone $= \frac{hR}{R-r}$, & que celle du petit S $g = \frac{hr}{R-r}$, la ſolidité du grand ſera (n°. 387.) $CR \times \frac{hR}{3R-3r} = \frac{CR^2 . h}{R-r \times 3}$, $= \frac{CR^2}{R-r} \times \frac{h}{3}$; & celle du petit $= cr \times \frac{hr}{3R-3r}$ $= \frac{cr^2 h}{R-r \times 3} = \frac{cr^2}{R-r} \times \frac{h}{3}$; donc, en ôtant la petite ſolidité de la grande, celle du cone tronqué ſera $= \frac{CR^2 - cr^2}{R-r} \times \frac{h}{3}$. Or $C . c :: R . r$. (304.) Donc $r = \frac{cR}{C}$. Ainſi $\frac{CR^2 - cr^2}{R-r} = \frac{CR^2 - cr^2}{R - \frac{cR}{C}}$ $= \frac{CR^2 - cr^2}{\frac{CR - cR}{C}} = \frac{C^2R^2 - Ccr^2}{CR - cR}$. Donc la ſolidité du cône tronqué ſera $= \frac{C^2R^2 - Ccr^2}{CR - cR} \times \frac{h}{3}$. Or, ſi l'on diviſe $C^2R^2 - Ccr^2$ par $CR - cR$, ou par $CR - Cr$ (à cauſe de $Cr = cR$), on aura le quotient exact $CR + Cr +$ l'expreſſion $\frac{cr^2}{R}$, laquelle $= cr$, parce que $\frac{C}{R} = \frac{c}{r}$. La ſolidité du cone tronqué ſe trouve donc $= \overline{CR + Cr + cr} \times \frac{h}{3}$, comme on s'étoit propoſé de le démontrer, art. 1.

## *REMARQUE I.*

Pour avoir la baſe moyenne proportionnelle Géométrique entre la ſupérieure & l'inférieure du cone tronqué, il ſemble qu'il ſuffiroit d'extraire la racine quarrée du produit de ces deux baſes. Mais, comme les racines quarrées ſont rarement exactes, & que pour une plus grande préciſion il faut ſe jetter alors dans l'approximation des racines, qui exige un calcul aſſez laborieux, on aura plus commodément cette baſe moyenne, en multipliant la circonférence C de la grande baſe par $r$, moitié du rayon de la petite circonférence ſupérieure du cone tronqué. Car on a vû (art. 1 de la Démonſt.) que cette baſe moyenne appellée $m = Cr$; ce qui fait éviter l'extraction des racines, ainſi que leur approximation.

## *REMARQUE II.*

Si l'on étoit curieux de trouver un cercle égal à cette baſe moyenne, il n'y auroit qu'à nommer ce cercle $= m$, & la moitié de ſon rayon $= x$: on auroit alors (306.) $m . CR :: x^2 . R^2$. Or (art. 1. de la Dém.) $m = Cr$; donc $Cr . CR :: x^2 . R^2$; ainſi $CR^2 r = CR\, x^2$, & $x^2 = \frac{CR^2 r}{CR} = Rr$; par conſéquent $R . x :: x . r$; ce qui démontre qu'une moyenne proportionnelle Géométrique $x$, entre R, moitié du rayon du grand cercle, & $r$ moitié du rayon du petit cercle du cone tronqué, eſt le demi-rayon d'un cercle égal à la baſe moyenne cherchée. Car, décrivant un cercle $y$ avec le double de ce demi-rayon, on trouveroit (306.) $y . CR :: x^2 . R^2$: or $x^2 = Rr$ (conſt.); donc $y . CR :: Rr . R^2$; & par con-

séquent $y = \frac{CR^2 r}{R^2} = Cr =$ (art. 1 de la Dém.) la base moyenne $m$; C. Q. F. D.

## PROBLÊME.

389. Déterminer la solidité de la Sphère. (*fig.* 135.)

## RÉSOLUTION.

Multipliez la surface de la Sphère par le tiers de son rayon, ou par la sixième partie de son diamètre; ce produit exprimera la solidité de la Sphère.

## DÉMONSTRATION.

Concevez la surface de la Sphère divisée en un très-grand nombre de petites portions égales quelconques, telles que *a o b*, qui ne diffèrent pas sensiblement d'une surface plane : de tous les points de cette petite surface, imaginez les rayons *a c*, *o c*, *b c*, &c. Il en naîtra une petite piramide *a b o c*, dont la hauteur est le rayon de la Sphère; & si l'on suppose que l'on ait réduit ainsi toute la solidité de la Sphère, il est évident qu'elle sera composée d'un très grand nombre de petites piramides, lesquelles ayant toutes même hauteur, auront, pour la somme de leurs bases, la surface entière de la Sphère. Or on trouve la solidité d'une piramide, en multipliant sa base par le tiers de sa hauteur (n°. 387.), & par conséquent on déterminera la solidité de toutes les petites piramides qui composent la Sphère, en multipliant la somme de leurs bases, ou la surface totale de la Sphere, par le tiers du rayon qui est leur hauteur commune; & comme le tiers du rayon est égal à la sixième partie du diamètre, il est clair que la solidité de la Sphère est égale au produit de sa surface par la sixième partie de son diamètre.

## COROLLAIRE I.

On voit par-là que la Sphère eſt égale à une pirámide, ou à un cone, qui auroit pour baſe la ſurface de la Sphere, & pour hauteur ſon rayon.

Suppoſons, par exemple, que le diamètre d'une Sphère = 4 pieds : on commencera par chercher (en ſe ſervant du rapport d'Archimède) la longueur de la circonférence de l'un de ſes grands cercles. On dira donc $7 . 22 :: 4 : \frac{4 \times 22}{7} = \frac{88}{7}$, valeur de la circonférence cherchée. Or (n°. 360.) cette circonférence multipliée par ſon diamètre donne la ſurface de la Sphère. Cette ſurface ſera donc $\frac{88}{7} \times 4 = \frac{352}{7} = 50 + \frac{2}{7}$. Enfin on multipliera $50\frac{2}{7}$ par la ſixième partie du diamètre, c'eſt-à-dire, par $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$ : or $50\frac{2}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{100}{3} + \frac{4}{21} = 33\frac{1}{3} + \frac{4}{21} = 33 + \frac{11}{21}$. Ce qui ſignifie que la ſolidité d'une Sphère, qui a 4 pieds de diamètre, eſt de 33 pieds cubes, & $\frac{11}{21}$ de pied cube, à peu près; parce que le rapport d'Archimède n'eſt qu'un rapport approché.

## COROLLAIRE II.

390. Il réſulte des trois Problèmes précédens, qu'en général les ſolides de même eſpèce ſont entr'eux comme le produit des dimenſions qui concourent à déterminer leur ſolidité.

Car, ſoient deux priſmes quelconques P, $p$, dont les hauteurs ſoient H, $h$, & les baſes BB, $bb$, (j'indique les baſes par les Quarrés, BB, $bb$; parce que les baſes des ſolides ſont des plans, dont on peut ſuppoſer la quadrature), on aura (n°. 383.) P = BBH, & $p = bbh$; donc P . $p$ :: BBH . $bbh$; & ſi, en la place des priſmes, on veut prendre des piramides ou des cones, on aura P

$= \frac{BBH}{3}$ & $p = \frac{bbb}{3}$ (n°. 383.); donc $P . p :: \frac{BBH}{3} . \frac{bbb}{3} :: BBH . bbh$: car les tiers sont entr'eux comme leurs touts; par conséquent les solides de même espèce sont entr'eux comme les produits des dimensions d'où résulte leur solidité.

## *COROLLAIRE III.*

391. Mais, quand les solides sont des corps semblables, c'est-à-dire, quand les dimensions de l'un sont proportionnelles aux dimensions de l'autre, ces corps sont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues. J'en vais faire la démonstration sur deux Sphères : il sera aisé de l'appliquer aux autres solides.

Soit une Sphère = S, la circonférence de l'un de ses grands cercles = C, son diamètre = D: pareillement appellons *s* une autre Sphère, *d* son diamètre, *c* la circonférence de l'un de ses grands cercles.

Suivant le n°. 389. $S = \frac{CDD}{6}$ & $s = \frac{cdd}{6}$; donc $S . s :: \frac{CDD}{6} . \frac{cdd}{6} :: CDD . cdd$; donc $S . s :: CDD . cdd$; ou $\frac{S}{s} = \frac{CDD}{cdd}$ : mais (n°. 305.) les circonférences sont entr'elles comme leurs diamètres, c'est-à-dire, $C . c :: D . d$; ou $\frac{C}{c} = \frac{D}{d}$; par conséquent, dans l'équation $\frac{S}{s} = \frac{CDD}{cdd}$, au lieu de $\frac{C}{c}$, on peut mettre $\frac{D}{d}$; ce qui donnera $\frac{S}{s} = \frac{DDD}{ddd}$, ou $S . s :: D^3 . d^3$. Cela veut dire que *les Sphères sont entr'elles comme les cubes de leurs diamètres.*

En supposant deux Sphères, dont l'une ait 1 pied de diamètre, & l'autre en ait 3, la solidité de la

première ſera 27 fois plus petite que la ſolidité de la ſeconde : car la première ſera à la ſeconde, comme le cube de 1 eſt au cube de 3, ou comme 1 eſt à 27.

## *COROLLAIRE IV.*

392. Faites attention, en paſſant, à un principe dont on fait un très grand uſage en Phyſique ; c'eſt qu'un gros ſolide a moins de ſurface, à proportion, qu'un petit ſolide de même matière.

Prenons l'exemple précédent. Une Sphère de trois pieds de diamètre a 27 fois plus de ſolidité qu'une autre ſphère d'un pied de diamètre : ainſi, en proportionnant la ſurface de ces ſphères à leur ſolidité, la groſſe devroit avoir 27 fois plus de ſurface que la petite ; elle n'en a pourtant que 9 fois plus : car vous pouvez vous rappeller que les ſurfaces des corps ſemblables, c'eſt-à-dire ici, les ſurfaces des ſphères, ſont entr'elles, comme les quarrés de leurs diamètres (n°. 366.), ou comme le quarré de 1 eſt au quarré de 3. Les ſurfaces des ſphères propoſées ſont par conſéquent entr'elles comme 1 eſt à 9 : la ſurface de la groſſe ſphère eſt donc ſimplement 9 fois plus grande que celle de la petite ; par conſéquent les ſurfaces des corps ne ſont pas proportionnées à leurs ſolidités.

## PROBLÊME.

393. Trouver le rapport de la ſolidité de la ſphère à celle du cilindre circonſcrit.

## RÉSOLUTION.

Vous ſçavez que la baſe du cilindre circonſcrit à la Sphère, eſt un grand cercle de la Sphère, & que la hauteur de ce même cilindre eſt le diamètre de

la Sphère. (n°. 361.) appellons L le cilindre, S la Sphère, C la circonférence de l'un de ſes grands cercles, D ſon diamètre.

On a la ſolidité d'un cilindre ou d'un priſme polygone, en multipliant ſa baſe par ſa hauteur. La baſe du cilindre propoſé eſt un cercle, dont l'aire eſt égale au produit de la circonférence par la moitié du rayon, ou par le quart du diamètre; ainſi cette aire eſt $\frac{CD}{4}$, laquelle multipliée par la hauteur D, produit $\frac{CDD}{4}$ pour la ſolidité du cilindre L circonſcrit : mais (n°. 389.) la ſolidité de la Sphère S eſt $\frac{CDD}{6}$; donc L . S :: $\frac{CDD}{4}$ . $\frac{CDD}{6}$ :: 6 CDD . 4 CDD :: 6 . 4 :: 3 . 2. Ainſi L . S :: 3 . 2, ou S . L :: 2 . 3, c'eſt-à-dire, que *la ſolidité de la Sphère eſt à celle du cilindre circonſcrit comme* 2 *eſt à* 3.

## *COROLLAIRE.*

394. Nous avons vû (n°. 364.) que la ſurface de la Sphère étoit auſſi à celle du cilindre circonſcrit comme 2 eſt à 3. La ſolidité de la Sphère eſt donc à la ſolidité du cilindre circonſcrit, comme la ſurface de la Sphère eſt à celle du même cilindre.

## PROBLÊME.

395. Transformer une piramide, un cone ou une Sphère, en un parallélipipède qui lui ſoit égal en ſolidité.

## RÉSOLUTION.

1°. On changera la baſe de la piramide ou du cone en un rectangle de même ſurface que cette baſe. Sur cette baſe ainſi transformée, on fera un parallélipipède, auquel on donnera pour hauteur le tiers

de la hauteur de la piramide ou du cone proposé ; il en réſultera évidemment le parallélipipède demandé (n°. 387.).

2°. Quant à la Sphère, on transformera ſa ſurface en rectangle, c'eſt-à-dire, que l'on fera un rectangle avec ſon diamètre, & la circonférence de l'un de ſes grands cercles (n°. 362.). On conſtruira ſur ce rectangle un parallélipipède, dont la hauteur ſoit égale au tiers du rayon de la Sphère, ou à la ſixième partie de ſon diamètre ; & ce parallélipipède aura la même ſolidité que la Sphère propoſée.

Je ne m'arrête pas à démontrer ces conſtructions, dont la ſeule indication eſt plus que ſuffiſante pour les faire concevoir.

## PROBLÊME.

396. Transformer un cilindre, ou un priſme polygone quelconque, en un parallélipipède de même ſolidité.

## RÉSOLUTION.

Changez, comme ci-deſſus, la baſe du cilindre, ou du priſme propoſé, en un rectangle de même ſurface. Sur cette baſe rectangulaire conſtruiſez un parallélipipède, dont la hauteur ſoit égale à celle du priſme ou du cilindre propoſé ; il en réſultera un parallélipipède tel qu'on le demande.

## PROBLÊME

397. Faire un cube égal à un parallélipipède donné.

## RÉSOLUTION.

Appellons P le parallélipipède donné ; nommons auſſi $a$, $b$, $c$ les trois dimenſions d'où réſulte ſa ſolidité : on aura $P = abc$ (n°. 383.).

Ainſi, 1°. ſi les trois dimenſions $a$, $b$, $c$ ſont données en nombres, tirez la racine cubique $x$ du produit $abc$ de ces trois dimenſions; le cube fait avec cette racine cubique $x$, ſera égal en ſolidité au parallélipipède P : car, puiſque l'on ſuppoſe $x$ égal à la racine cubique de $abc$; donc le cube de $x$ doit redonner $abc$.

Il arrive fort ſouvent que la racine cubique n'eſt pas exacte; en ce cas il faut avoir recours à l'approximation des racines (n°. 84. Arith.).

2°. Quand les trois dimenſions du parallélipipède P ne ſont données qu'en lignes, en nommant $x$ le côté du cube cherché, on aura $abc = x^3$. Cherchons d'abord (n°. 309.) une moyenne proportionnelle Géométrique $f$ entre deux dimenſions quelconques $a$, $b$ du parallélipipède P, pour avoir $a.f::f.b$. Donc $ab = ff$; ainſi $abc = ffc$; & par conſéquent $x^3 = ffc$. Donc $fx^3 = f^3c$, d'où l'on tire $f^3.x^3::f.c$.

Mais il eſt aiſé de remarquer, que cette dernière proportion peut être déduite d'une progreſſion continue, qui contiendroit deux moyennes proportionnelles $x$, $y$, entre $f$ & $c$. Car, ſi l'on fait $\dot{-}f.x.y.c$, ou $f.x::x.y::y.c$, on en déduira $f^3.x^3::f.c$, (n°. 257.) c'eſt-à-dire, que le cube de la moyenne proportionnelle $f$ eſt au cube cherché, comme cette moyenne proportionnelle eſt à la troiſième dimenſion $c$ du parallélipipède.

Le Problême ſe réduit donc à trouver deux moyennes proportionnelles Géométriques entre deux lignes données $f$, $c$; & le cube fait ſur la première de ces moyennes proportionnelles ſera le cube que l'on demande.

Mais on ne ſçauroit trouver avec le ſeul ſecours de la ligne droite & du cercle deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données; ce Problême

ne peut être réſolu que par la Géométrie de courbes différentes du cercle.

398. La *duplication du cube*, que l'Oracle de Délos rendit autrefois ſi célèbre, revient à ce Problême. En liſant la Note (*a*), on verra à quelle occaſion il fut propoſé de trouver un cube double d'un autre. Les anciens Géomètres employerent toute leur ſagacité au dénouement de cette queſtion; elle étoit au-deſſus de la Géométrie élémentaire,

(*a*) Le Problême de la *duplication du cube* n'eſt guères moins fameux que celui de la *quadrature du cercle*.

La peſte déſoloit Athènes & l'on n'y trouvoit point de remède. On a éprouvé plus d'une fois que l'opinion étoit un excellent ſpécifique : le Médecin qui s'eſt emparé une fois de l'eſprit de ſon malade, eſt très-avancé dans ſa cure. Voilà pourquoi je penſerois qu'une des grandes parties de la Médecine eſt l'éloquence.

Les malheureux Athéniens, pénétrés de bonne foi, dont ils avoient toujours de forts redoublemens dans les grandes calamités, eurent recours à l'Oracle de Délos. Apollon y faiſoit des merveilles : c'étoit une des plus grandes dévotions de la Grèce. L'Autel du Temple avoit préciſément une figure cubique.

Apparemment l'Oracle étoit Géomètre, ou plutôt quelque Géomètre faiſoit l'Oracle : car, après avoir entendu les Envoyés d'Athènes, il leur répondit que la peſte ceſſeroit, s'ils pouvoient ſeulement lui élever un Autel cubique double du ſien.

Je ne ſçais pas ſi les Athéniens en comprirent d'abord la difficulté; mais ils durent s'appercevoir, quand ils y eurent un peu penſé, que la plaiſanterie de l'Oracle étoit fort déplacée; parceque la réſolution du Problême étoit impoſſible géométriquement, c'eſt-à-dire, ſelon les Anciens, en n'employant que la ligne droite & le cercle.

Je me perſuade que l'Oracle Géomètre avoit uſé toute ſa Géométrie à cette queſtion, & qu'il ne l'avoit propoſée que pour ſe réjouir aux dépens des pauvres Athéniens. En ce tems-là, c'étoit aſſez la coutume des Dieux de ſe moquer des humains qui avoient beſoin de leur protection, parceque très-ſouvent les humains ſe moquoient des Dieux, dont ils n'avoient pas beſoin.

Cette Note ſera peut-être regardée comme un écart un peu violent; mais j'ai déclaré plus d'une fois que je m'expliquerois volontiers ſur la nature de l'eſprit humain, quand l'occaſion s'en préſenteroit. Combien de fois l'ai-je accuſée d'être trop lente à ſe montrer? » Si l'on trouve cette conduite peu exacte, dit M. le Chevalier de Follard, » & contraire aux règles de la diſcipline des » Auteurs réguliers, je ne ſçais qu'y faire. Les digreſſions plaiſent » & délaſſent; tout le monde le dit. Je conſens que d'autres, qui » ne ſont pas de l'avis de tout le monde, déſapprouvent cette » eſpèce de libertinage : ils ne feront pas pancher la balance. Je dois » m'accommoder à toutes ſortes d'eſprits, & éviter ſur toutes choſes » la ſéchereſſe, dont les matières que je traite ne ſont que trop » ſuſceptibles. »

comme le Problême ci-dessus, dont elle n'est pas différente.

Car soit le cube $a^3$ dont on demande un cube double. Si vous appellez $x$ le côté du cube cherché par la condition du Problême, vous aurez $x^3 = 2a^3$, ou $x^3 \times 1 = a^3 \times 2$. Ainsi $a^3 . x^3 :: 1 . 2$, (n°. 246.) $:: a . 2a$ (n°. 252.). Donc $a^3 . x^3 :: a . 2a$.

Cette dernière proportion fait voir qu'en faisant un cube sur la première de deux moyennes proportionnelles entre le côté $a$ du cube donné & son double $2a$, ce cube sera celui que l'on cherche. En effet, supposons les deux moyennes proportionnelles $x, y$ entre $a$ & $2a$, c'est-à-dire, supposons la progression continue $a . x :: x . y :: y . 2a$, on aura (n°. 257.) $a^3 . x^3 :: a . 2a$, ou $2a . a :: x^3 . a^3$; & comme $2a$ est le double de $a$, ainsi le cube de $x^3$ est double du cube $a^3$.

Le Problême de la *duplication du cube* se réduit donc à trouver deux moyennes proportionnelles entre le côté du cube donné & le double de ce côté. Après avoir reconnu que la Géométrie ordinaire ne suffisoit pas à la résolution de ce Problême, les anciens Géomètres le prirent à cœur. A l'invitation de Platon, les plus illustres Mathématiciens de toute la Grèce y travaillèrent. Plusieurs trouvèrent des courbes fort ingénieuses, qui en donnoient la résolution; d'autres imaginèrent des instrumens qui produisoient le même effet. Platon s'y distingua: son instrument est d'une invention très-élégante; on ne me sçaura pas mauvais gré de le faire connoître.

## PROBLÊME.

Trouver *organiquement* (*a*) deux moyennes pro-

(*a*) *Organiquement*, c'est-à-dire, avec un instrument.

portionnelles entre deux lignes données A B, B C.

*Réſolution organique de Platon.*

399. Sur l'une des branches R G de l'équerre M R G (*fig.* 136.) diſpoſez perpendiculairement la régle mobile P S; enſorte qu'elle puiſſe couler; ſuivant le beſoin, le long de la branche R G, en conſervant ſa perpendicularité. Vous avez l'inſtrument de Platon.

Pour trouver avec cet inſtrument deux moyennes proportionnelles entre les deux lignes données A B, B C; après avoir mis ces deux lignes à angles droits au point B, prolongez A B indéfiniment vers P, & B C auſſi indéfiniment vers R. Cette préparation faite, mettez l'angle de l'inſtrument en un point R, tel que ſa branche R M paſſant par l'extrémité A de la ligne A B, ſon autre branche R G coupe le prolongement B P en un point P, où la règle mobile P S amenée paſſe par l'extrémité C de la ſeconde ligne B C (ce que quelques tentatives feront découvrir.). Je dis que les deux lignes B R, B P ſont les deux moyennes proportionnelles cherchées, c'eſt-à-dire, que A B . B R : : B R . B P : : P B . B C.

## DÉMONSTRATION.

Le triangle A R P eſt rectangle en R, & (conſt.) la ligne R B eſt perpendiculaire ſur l'hypothènuſe A P : or (n°. 291.) ſi de l'angle droit d'un triangle rectangle on abbaiſſe une perpendiculaire ſur l'hypothénuſe, cette perpendiculaire eſt moyenne proportionnelle entre les parties de l'hypothénuſe. Donc A B . B R : : B R . B P, & par la même raiſon, le triangle R P C étant rectangle en P, B R . B P : : B P . B C. Ainſi B R & B P ſont moyen-

nes proportionnelles entre les deux lignes données A B, B C; C. Q. F. D.

Il faut convenir que cette Réſolution organique eſt très-élégante; mais auſſi eſt-elle un peu tâtonneuſe.

M. Deſcartes, qui ſera à perpétuité la brillante époque du plus grand eſſor que les Sciences aient jamais pris, a bien rencheri ſur tous les Anciens qui ont travaillé à la duplication du cube. Sans parler de ſa Géométrie où ce Problême ſe trouve réſolu comme par accident, ce génie, unique de ſon tems, & encore ſupérieur aujourd'hui, a inventé un inſtrument qui donne, ſans aucun tâtonnement, non-ſeulement deux moyennes proportionnelles, mais encore tel nombre que l'on en veut.

## PROBLÊME.

400. Trouver organiquement entre deux lignes données tant de moyennes proportionnelles que l'on voudra.

### *Réſolution organique de M. Deſcartes.*

Son inſtrument A B C (*fig.* 137.) eſt une eſpèce de compas, compoſé de deux règles, A B, B C, mobiles autour de la charnière B. Sur ces règles ſont diſpoſées pluſieurs équerres, ſuivant le nombre des moyennes proportionnelles que l'on cherche: il faut trois équerres pour deux moyennes, quatre pour trois, cinq pour quatre, & ainſi de ſuite. Chacune de ces équerres touche l'angle de ſa voiſine, comme on le voit aux points *f*, *g*, *h*, *m*, *o*. Les branches *d p*, *f s*, *g t*, *h x*, *m y*, *o u*, &c. peuvent gliſſer ſur les règles A B, B C; par conſéquent les autres branches *d f*, *f g*, &c. étant forcées de ſe mouvoir, ſi l'on arrête la première équerre

*f d p* au point *d* sur la règle B C, en ouvrant l'angle ou le compas A B C, l'équerre *p d f* fera glisser la voisine *g f s* sur la règle A B : l'équerre *g f s* chassée chassera l'équerre *h g t* sur la règle B C, & ainsi de suite ; ensorte que par le même mouvement toutes ces équerres se poussent & se chassent en même-tems ; & lorsqu'on ferme le compas entièrement, c'est-à-dire, lorsque les deux règles A B, B C se touchent, tous les points *o, m, h, g, f, d* viennent se réunir au point *a*.

Si vous avez bien conçu la construction de cet instrument, il vous sera facile de comprendre que l'on peut trouver par son moyen autant de moyennes proportionnelles que l'on en demandera.

Voulez-vous deux moyennes proportionnelles entre B D & B H ? transportez la plus petite B D sur la règle B C de B en *d*, & la plus grande B H sur la règle A B de B en *h*. Mettez l'angle de la première équerre *f d p* au point *d* où vous l'arrêterez ; ouvrant ensuite le compas A B C jusqu'à ce que la troisième équerre *h g t* passe par l'extrémité *h* de la plus grande des deux lignes données, l'instrument vous montrera les deux lignes B *f*, B *g*, qui seront moyennes proportionnelles entre les lignes proposées B *d*, B *h* ; c'est-à-dire, que l'on aura B *d*. B *f* :: B *f*. B *g* :: B *g*. B *h*.

## DÉMONSTRATION.

Remarquez que par la nature de l'instrument les deux triangles B *f g*, B *g h* sont tous deux rectangles, le premier en *f*, & l'autre en *g*. Mais il a été démontré (n°. 292.) que, si de l'angle droit *f* d'un triangle rectangle l'on abbaisse une perpendiculaire *f d* sur l'hypothénuse B *g*, chaque côté, comme B *f*, devient une moyenne proportionnelle

entre l'hypothénuſe B*g* & le ſegment B*d* qui répond à ce côté. Ainſi B*d*. B*f*:: B*f*. B*g*: par la même raiſon le triangle rectangle B*gh*, dont B*h* eſt l'hypothénuſe, ſur laquelle *gf* eſt abbaiſſée perpendiculairement de l'angle droit *g*, donnera cette proportion, B*f*. B*g*:: B*g*. B*h*, laquelle étant miſe à la ſuite de la première, produira B*d*. B*f*:: B*f*. B*g*:: B*g*. B*h*. Les lignes B*f*, B*g*, ſont donc moyennes proportionnelles entre les deux lignes B*d*, B*h*, ou leurs égales B D, B H; C. Q. F. D.

Quand on voudra trouver trois moyennes proportionnelles, par exemple, entre B D & B M, il faut que l'inſtrument ait quatre équerres; & tranſportant, comme ci-deſſus, la plus petite B D ſur l'une des règles B C de B en *d*, enſuite la plus grande B M ſur la même règle B C de B en *m*, on fixera la première équerre au point *d*, & l'on ouvrira le compas A B C juſqu'à ce que la branche *k m* de la quatrième équerre paſſe par l'extrémité *m* de la plus grande B *m* des deux lignes données; alors les trois lignes B*f*, B*g*, B*h* ſeront les trois moyennes proportionnelles que l'on demande; ce qui ſe démontre, comme ci-deſſus. Car, à cauſe des trois triangles rectangles B*fg*, B*gh*, B*hm*, & des trois perpendiculaires *fd*, *gh*, *hg*, on aura (n°. 292.) B*d*. B*f*:: B*f*. B*g*:: B*g*. B*h*:: B*h*. B*m*; par conſéquent les trois lignes B*f*, B*g*, B*h* ſont trois moyennes proportionnelles entre les deux lignes données B*d*, B*m*, ou leurs égales B D, B M.

Il eſt clair que cet inſtrument s'étend à tel nombre de moyennes proportionnelles que l'on voudra, ſans aucun tâtonnement.

401. Cependant, quoique l'on ne puiſſe pas trouver, avec le ſeul ſecours de la ligne droite & du cercle, deux moyennes proportionnelles, on en peut trouver trois.

Pour cela on doit ſçavoir que cinq grandeurs étant en progreſſion continue, le quatrième degré de la première eſt au quatrième degré de la ſeconde, comme la première eſt à la cinquième; c'eſt-à-dire, qu'ayant $\div a . x . y . z . b$, on en déduira $a^4 . x^4 :: a . b$.

Rappellez-vous le n°, 257. où il a été démontré qu'une proportion continue de quatre termes fait que le cube du premier terme eſt au cube du ſecond, comme le premier eſt au quatrième. Ainſi $a^3 . x^3 :: a . z$, d'où l'on tire $a^3 z = a x^3$ : mais de plus ( ſupp. ) $a . x :: z . b$; donc $ab = xz$. Ainſi, en multipliant $a^3 z$ par $ab$, & $ax^3$ par $xz$, $a^4 bz = a x^4 z$. Diviſant l'un & l'autre membre par $z$, on trouve $a^4 b = a x^4$. Donc $a^4 . x^4 :: a . b$. Ceci ſuppoſé.

## PROBLÊME.

402. Trouver Géométriquement trois moyennes proportionnelles $x$, $y$, $z$ entre les deux lignes données $a$, $b$.

## RÉSOLUTION.

On ſuppoſe que $\div a . x . y . z . b$; donc (n°. 401. ) $a^4 . x^4 :: a . b$; ainſi $a^4 b = a x^4$; donc $a^3 b = x^4$. Suppoſant une moyenne proportionnelle $f$ entre $a$ & $b$, on aura $ff = ab$, & par conſéquent $aaff = x^4$. Tirant la racine quarrée de l'un & de l'autre membre, il vient $af = x^2$. Donc $a . x :: x . f$; c'eſt-à-dire, que la première $x$ des trois moyennes proportionnelles $x$, $y$, $z$ entre $a$ & $b$, eſt une moyenne proportionnelle entre $a$ & $f$, que l'on trouve géométriquement ( n°. 309. ): or la première des trois moyennes proportionnelles étant trouvée, les deux autres s'enſuivent. On peut

peut donc trouver géométriquement, c'eſt-à-dire, avec la ligne droite & le cercle, trois moyennes proportionnelles entre deux lignes données, quoique l'on ne puiſſe pas en trouver deux : C. Q. F. D.

403. On en peut même trouver géométriquement 7, 15, &c. Je vais ſimplement en expoſer le moyen. Suppoſons que l'on demande ſept moyennes proportionnelles entre $a$ & $b$. Appellons $x$ la première de ces ſept moyennes proportionnelles. Il y aura donc neuf quantités en proportion continue. Ainſi (n°. 257.) $a^8 . x^8 :: a . b$. Donc $a^8 b = a x^8$, & $a^7 b = x^8$. Cherchez (n°. 309.) une moyenne proportionnelle $m$ entre $a$ & $b$, pour avoir $mm = ab$, d'où vous déduirez $a^6 mm = x^8$. Tirant la racine quarrée, vous aurez $a^3 m = x^4$. Cherchant encore une moyenne proportionnelle $p$ entre $a$ & $m$, vous prendrez $pp$ au lieu de $am$, & la dernière équation deviendra $aapp = x^4$ ; on en extraira la racine quarrée, ce qui donnera $ap = xx$. Donc $a . x :: x . p$. Voilà donc la première des ſept moyennes proportionnelles trouvée en ligne, & par conſéquent tout eſt trouvé (n°. 264).

Le Problême, qui conſiſte à trouver deux moyennes proportionnelles géométriques, eſt fort utile dans la pratique. On peut par ſon moyen augmenter ou diminuer un corps ſelon un rapport quelconque ; c'eſt-à-dire, qu'ayant un parallélipipède, une ſphère, une pyramide, un priſme, &c. on pourra toujours déterminer un autre corps ſemblable, qui en ſoit le double, le triple, &c. ou les $\frac{2}{3}$, les $\frac{4}{5}$, les $\frac{3}{7}$, &c.

## PROBLÊME.

404. Déterminer un parallélipipède qui ne ſoit

que les $\frac{3}{7}$ d'un parallélipipède P ſemblable donné.

## RÉSOLUTION.

Soient $a$, $b$, $c$ les trois dimenſions du parallélipipède P donné. Appellons $x$ le côté du parallélipipède cherché, qui doit être homologue au côté $a$. Rappellons-nous maintenant que les corps ſemblables ſont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues. (n°. 391.) Or puiſque l'on demande un parallélipipède qui ne ſoit que les $\frac{3}{7}$ de P, le cube du côté $x$ ne doit être que les $\frac{3}{7}$ du cube de $a$. Ainſi $x^3 = \frac{3a^3}{7}$, ou $x^3 \times a = a^3 \times \frac{3a}{7}$. Donc $a^3 . x^3 :: a . \frac{3a}{7}$; ce qui fait voir que le côté $x$ du cube cherché eſt la premiere de deux moyennes proportionnelles entre $a$ & $\frac{3a}{7}$ (n°. 397.) Cette ligne ne pouvant ſe trouver avec le ſeul ſecours de la ligne droite & du cercle, on prendra en nombres la valeur du côté $a$; & comme l'on a l'équation $x^3 = \frac{3a^3}{7}$, on déduira $x = \sqrt[3]{\frac{3a^3}{7}}$, c'eſt-à-dire, que l'on aura en nombres la longueur de $x$, en tirant de $\frac{3a^3}{7}$ la racine cubique très-approchée.

Le côté $x$ étant une fois connu, les deux autres côtés du parallélipipède cherché ſe trouveront géométriquement; puiſque, par la condition du Problême, les trois dimenſions de ce parallélipipède doivent être proportionnelles aux trois dimenſions $a$, $b$, $c$, du parallélipipède donné P.

Suppoſant donc $x$ connu, & appellant $z$, $y$ les deux autres côtés que l'on cherche, on dira, $a . x$

:: $b.z$, & les trois premiers termes connus $a$, $x$, $b$, de cette proportion, feront connoître le quatrième $z$. Le troisième côté $y$ se détermine de la même manière, en faisant $a.x::c.y$, où l'on voit que $y$ est une quatrième proportionelle aux trois termes connus $a$, $x$, $c$, & par conséquent le côté $y$ est déterminé. Ainsi, faisant un parallélipipède avec les trois côtés $x$, $z$, $y$, ce parallélipipède sera semblable au parallélipipède P donné, & il n'en sera que les $\frac{1}{7}$.

Le Problême sera plutôt résolu, s'il s'agit de trouver une Sphère qui soit à une autre dans tel rapport que l'on voudra.

Car supposons que l'on demande une Sphère triple d'une Sphère donnée, dont le diamètre soit $d$. Appellant $x$ le diamètre de la Sphère cherchée, comme on sçait que les Sphères sont entr'elles comme les cubes de leurs diamètres (n°. 391.), le cube de $x$ sera triple du cube du diamètre $d$ : ainsi $x^3 = 3d^3$; d'où l'on tire $x = \sqrt[3]{3d^3}$; c'est-à-dire, qu'en triplant le cube du diamètre donné, la racine cubique de ce triple fera connoître la longueur du diamètre cherché.

L'Artillerie fait un très grand usage de ce Problême : il donne des boulets dans telle proportion que l'on veut.

Un corps brut, c'est-à-dire, couvert d'inégalités, tel qu'un caillou, ne paroît pas susceptible d'une mesure bien exacte ; cependant on peut en approcher de fort près.

## PROBLÊME.

405. Trouver la solidité d'un corps brut.

## RÉSOLUTION.

Préparez un vaſe cubique ou parallélipipède d'une meſure connue, dont la hauteur ſoit diviſée en un grand nombre de parties égales ; diſpoſez-le horiſontalement, & après l'avoir rempli d'eau, plongez-y le corps à meſurer : il chaſſera une quantité d'eau d'une groſſeur égale à ſon volume ; par conſéquent, en meſurant cette eau chaſſée, on aura la ſolidité du corps brut qui lui eſt égal.

Mais, comme il eſt difficile de recueillir exactement l'eau qui tombe d'un vaſe, on retirera le corps plongé : la ſouſtraction de ce corps occaſionnera un vuide, dont le toiſé ſera d'autant plus facile que l'on aura fait un plus grand nombre de diviſions ſur la hauteur du vaſe. Ce toiſé fera connoître la ſolidité de l'eau, dont le corps brut occupoit la place : cette ſolidité eſt la même que celle du corps brut ; ainſi l'on aura la meſure de ce corps : C. Q. F. T. & D.

# CHAPITRE III.

## *DU TOISÉ DES SOLIDES.*

406. Nous avons déja vû que l'on évaluoit la solidité des corps avec une mesure cubique, mesure arbitraire, mais déterminée dans chaque pays, afin que l'on puisse y rapporter les corps, dont on a intérêt de connoître la solidité.

Toiser un solide, c'est donc déterminer combien de fois ce solide contient une mesure cubique convenue, ou simplement quelle partie il en contient. Pour cela on mesure les trois dimensions de ce corps. On les multiplie les unes par les autres, & il en résulte un *produit* qui en fait connoître la solidité en mesures cubiques. Ce calcul est très simple & fort aisé, lorsque les trois dimensions du solide proposé sont de même espece, c'est-à-dire, lorsqu'elles contiennent simplement des toises, ou simplement des pieds, &c. mais quand outre les toises, ou les pieds, quelques-unes de ses dimensions ou même toutes les trois contiennent encore des pouces, des lignes, &c. en réduisant ces dimensions à leur plus basse espece, en lignes, par exemple, le calcul devient d'une longueur énorme : c'est pourquoi on a cherché à le simplifier.

407. Une toise cube étant un solide long, large & haut d'une toise, ou qui a une toise de hauteur sur une base qui est une toise quarrée, concevez que sa hauteur soit divisée en six parties égales. Par chaque point de division faites passer des plans paralleles à la base. Ces plans diviseront la toise cube en six tranches, dont chacune aura une toise quarrée

pour baſe & un pied de hauteur ; c'eſt ce qu'on appelle *un pied de toiſe cube*.

Si vous imaginez que la hauteur du pied de toiſe cube ſoit diviſée en douze parties égales, & que par les points de diviſion l'on faſſe paſſer des plans paralleles à la baſe, il en réſultera douze tranches qui auront chacune une toiſe quarrée pour baſe & un pouce de hauteur ; chacune de ces tranches eſt *un pouce de toiſe cube*. Le pied de toiſe cube contient 12 de ces pouces, & la toiſe cube en contient 72.

Pareillement un *ligne de toiſe cube* eſt un ſolide dont la baſe eſt une toiſe quarrée, & la hauteur n'eſt que d'une ligne ; dites la même choſe par rapport au *point de toiſe cube*.

On voit par-là que la toiſe cube contient 6 pieds de toiſe cube ; que le pied de toiſe cube vaut 12 pouces de toiſe cube ; le pouce de toiſe cube = 12 lignes de toiſes cube ; enfin la ligne de toiſe cube = 12 points de toiſe cube ; enſorte que le toiſé des ſolides a préciſément les mêmes diviſions que le toiſé des longueurs : ce qui eſt très bien imaginé.

Avant d'en venir à la pratique, remarquez donc bien qu'une toiſe quarrée, multipliée par des pieds, donne des pieds de toiſe cube, dont il en faut 6 pour la valeur de la toiſe cube. Que la même toiſe quarrée, multipliée par des pouces, produit des pouces de toiſe cube, dont le pied de toiſe cube en contient 12, & la toiſe cube 72. Pareillement, ſi l'on multiplie une toiſe quarrée par des lignes, on aura des lignes de toiſe cube, dont le pouce de toiſe cube en contiendra 12, & le pied de toiſe cube en vaudra 144. Enfin des points qui multiplient une toiſe quarrée, produiſent des points de toiſe cube. Il en faut 12 pour la ligne de toiſe cube, 144 pour le pouce de toiſe cube, &c.

## PROBLÊME.

408. Trouver la ſolidité d'un parallélipipède, dont la largeur = 2 toiſes, 1 pied, 3 pouces; la longueur = 3 toiſes, 2 pieds, 4 pouces; & la hauteur = 1 toiſe, 5 pieds, 9 pouces.

## RÉSOLUTION.

On diſpoſera ces trois dimenſions les unes ſous les autres, chaque eſpèce dans la colonne qui lui convient, ainſi que l'opération l'indique.

### OPÉRATION.

| Toiſes. | Pieds. | Pouces. | Lignes. | Points. | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 | 0 | 0 | |
| 3 | 2 | 4 | 0 | 0 | |
| 1 | 5 | 9 | 0 | 0 | |
| 2 | 1 | 3 | 0 | 0 | |
| 3 | 2 | 4 | 0 | 0 | |
| 6 | 3 | 9 | 0 | 0 | |
| | 4 | 5 | 0 | 0 | |
| | | 8 | 10 | 0 | |
| 7 | 2 | 10 | 10 | 0 | (B) |
| 1 | 5 | 9 | 0 | 0 | |
| 7 | 2 | 10 | 10 | 0 | |
| 3 | 4 | 5 | 5 | 0 | |
| 2 | 2 | 11 | 7 | 4 | |
| | 3 | 8 | 10 | 10 | |
| | 1 | 10 | 5 | 5 | |
| 14 | 3 | 11 | 2 | 7 | |

Et après avoir tiré une ligne ſous ces dimenſions, on écrira une ſeconde fois les deux premieres, afin

de les multiplier l'une par l'autre, comme il a été enſeigné au toiſé des ſurfaces, ce qui produira 7 toiſes quarrées, 2 pieds, 10 pouces, 10 lignes de toiſe quarrée, que l'on peut regarder comme la baſe (B) du ſolide propoſé. On multipliera enſuite cette baſe par ſa hauteur, c'eſt-à-dire, par la troiſième dimenſion = 1 toiſe, 5 pieds, 9 pouces, que l'on diſpoſera pour cet effet ſous 7 toiſes, 2 pieds, 10 pouces, 10 lignes de toiſe quarrée, & tirant une ligne ſous ces deux dimenſions, on multipliera tous les termes de la première ſucceſſivement par chaque terme de la ſeconde; ainſi l'on dira: 10 lignes de toiſe quarrée multipliées par 1 toiſe, donnent 10 lignes de toiſe cube, c'eſt-à-dire, un parallélipipède, dont la baſe eſt une toiſe quarrée & la hauteur 10 lignes, parce que 10 lignes de toiſe quarrée repréſentent un parallélogramme *long* d'une toiſe & large de 10 lignes; par conſéquent en multipliant ce parallélogramme par une toiſe, c'eſt-à-dire, en lui donnant une toiſe de hauteur, il en naît un parallélipipède, dont la hauteur & la longueur valent chacune une toiſe, & l'épaiſſeur eſt de 10 lignes. Or la hauteur & la longueur forment enſemble une toiſe quarrée, que l'on peut prendre pour la baſe de ce parallélipipède, dont l'épaiſſeur alors ſera de dix lignes; ce qui produira dix lignes de toiſe cube, ſuivant la définition que nous avons donnée de la ligne de toiſe cube, où nous avons dit que c'étoit un parallélipipède haut d'une ligne ſur une baſe en toiſe quarrée.

On doit appliquer cette explication aux autres dimenſions ſur leſquelles nous allons opérer, afin que l'on nous diſpenſe d'une répétition, qui deviendroit ennuyeuſe même à nos Lecteurs.

En faiſant un ſemblable calcul, & par la même raiſon, l'on trouvera 10 pouces de toiſe cube,

2 pieds de toise cube, & 7 toises cubes.

Il faudra ensuite multiplier la dimension B par 5 pieds, en considérant que le produit de cette dimension par une toise étant 7 toises cubes, 2 pieds, 10 pouces, 10 lignes de toise cube, si on partage 5 pieds en 3 + 2, on ne doit prendre que la moitié & le tiers du produit d'une toise : on écrira donc 3 toises cubes, 4 pieds, 5 pouces, 5 lignes de toise cube, pour la valeur d'une demi toise ou de 3 pieds; & 2 toises cubes, 2 pieds, 11 pouces, 7 lignes, 4 points pour celle de 2 pieds. Après cela, on cherchera le produit de 9 pouces, dont on fera 6 + 3 ; & l'on prendra d'abord pour 6 pouces, c'est le quart de la valeur de deux pieds, c'est-à-dire, le quart de 2 toises cubes, 2 pieds, 11 pouces, 7 lignes, 4 points de toise cube ; ce qui produira 3 pieds, 8 pouces 10 lignes, 10 points de toise cube, dont la moitié = 1 pied, 10 pouces, 5 lignes, 5 points de toise cube, est la valeur de trois pouces. On fera enfin l'addition des cinq produits qui se trouveront sous la derniere ligne, & l'on verra que la solidité du parallélipipède proposé est de 14 toises cubes, 3 pieds, 11 pouces, 2 lignes, 7 points de toise cube.

## PROBLÊME.

409. Déterminer la solidité d'un corps dont la longueur = 15 toises, 5 pieds, 3 pouces ; la largeur = 6 toises, 2 pieds, 6 pouces ; & la hauteur = 8 toises, 3 pieds, 9 pouces.

## RÉSOLUTION.

Après avoir disposé ces trois dimensions, comme l'opération le fait voir,

OPÉRATION.

| Toiſes. | Pieds. | Pouces. | Lignes. | Points. | |
|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 5 | 3 | 0 | 0 | |
| 6 | 2 | 6 | 0 | 0 | |
| 8 | 3 | 9 | 0 | 0 | |
| 15 | 5 | 3 | 0 | 0 | |
| 6 | 2 | 6 | 0 | 0 | |
| 95 | 1 | 6 | 0 | 0 | |
| 5 | 1 | 9 | 0 | 0 | |
| 1 | 1 | 11 | 3 | 0 | |
| 101 | 5 | 2 | 3 | 0 | (A) |
| 8 | 3 | 9 | 0 | 0 | |
| 814 | 5 | 6 | 0 | 0 | |
| 50 | 5 | 7 | 1 | 6 | |
| 12 | 4 | 4 | 9 | 4 $\frac{1}{2}$ | |
| 878 | 3 | 5 | 10 | 10 $\frac{1}{2}$ | |

on cherchera d'abord le produit (A) des deux premières, qui contient 101 toiſes quarrées, 5 pieds, 2 pouces, 3 lignes de toiſe quarrée; on écrira ſous ce produit la troiſième dimenſion, qui eſt 8 toiſes, 3 pieds, 9 pouces.

Et l'on continuera de multiplier le produit A par 8 toiſes, pour avoir 814 toiſes cubes, 5 pieds, 6 pouces de toiſe cube; après quoi il s'agira de trouver la valeur du produit A par 3 pieds: mais, au lieu de 3 pieds, ſi l'on ſuppoſoit 1 toiſe, il eſt évident qu'il en réſulteroit 101 toiſes cubes, 5 pieds, 2 pouces, 3 lignes de toiſe cube; ainſi pour 3 pieds l'on ne prendra que la moitié du produit de 1 toiſe, c'eſt-à-dire, 50 toiſes cubes, 5 pieds, 7 pouces,

1 ligne, 6 points de toiſe cube. Enfin l'on prendra la valeur de 9 pouces, c'eſt le quart de la valeur de 3 pieds = 12 toiſes cubes, 4 pieds, 4 pouces, 9 lignes, 4 points $\frac{1}{2}$ de toiſe cube; après quoi on fera l'addition des trois produits qui ſont ſous la derniere ligne; ce qui produira 878 toiſes cubes, 3 pieds, 5 pouces, 10 lignes, 10 points $\frac{1}{2}$ de toiſe cube pour la ſolidité du corps propoſé, dont on ſuppoſe les trois dimenſions complettes.

Je n'entre pas dans un détail fort rigoureux du calcul, me bornant à en indiquer la marche; parce que je dois ſuppoſer que l'on y ſera fort exercé, lorſque l'on arrivera à celui-ci, auquel on n'entendroit rien, ſi l'on ne ſe rappelloit pas la méthode dont nous avons fait uſage pour le calcul des ſurfaces. Ce n'eſt point par des pieds quarrés, ni par des pouces quarrés, &c. que nous les avons calculées; mais par des pieds, des pouces, des lignes, des points de toiſe quarrée, qui ſont des rectangles longs d'une toiſe ſur une largeur d'un pied ou d'un pouce, &c. c'eſt pourquoi, quand ces parallélogrammes viennent à être multipliés par une toiſe, on a un ſolide ou plutôt un parallélipipede, dont deux dimenſions valent chacune une toiſe, (ce qui fait une toiſe quarrée (& la troiſieme dimenſion eſt une partie de toiſe. Il eſt néceſſaire de bien concevoir tout ceci; moyennant quoi, le toiſé des ſurfaces & des ſolides eſt préciſément le même que celui des ſimples longueurs, dont l'exécution eſt ce qu'il y a au monde de plus facile. Donnons encore quelques Problêmes.

## PROBLÊME.

410. On demande la ſolidité d'un priſme quelconque, dont la premiere dimenſion = 3 toiſes, 1 pied, 7 pouces; la ſeconde = 2 toiſes, 4 pieds,

9 pouces; & la troisième = 2 pieds, 11 pou.

## RÉSOLUTION.

Cherchez d'abord le produit C des deux premières dimensions.

### OPÉRATION.

| Toises. | Pieds. | Pouces. | Lignes. | Points. | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 7 | 0 | 0 | |
| 2 | 4 | 9 | 0 | 0 | |
| | 2 | 11 | 0 | 0 | |
| 3 | 1 | 7 | 0 | 0 | |
| 2 | 4 | 9 | 0 | 0 | |
| 6 | 3 | 2 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | 6 | 4 | 0 | |
| 1 | 0 | 6 | 4 | 0 | |
| | 1 | 7 | 7 | 0 | |
| | | 9 | 9 | 6 | |
| 9 | 0 | 8 | 0 | 6 | (C) |
| | 2 | 11 | | | |
| 3 | 0 | 2 | 8 | 2 | |
| 0 | 4 | 6 | 8 | 0 $\frac{1}{2}$ | |
| | 2 | 3 | 4 | 0 $\frac{1}{4}$ | |
| | 1 | 6 | 2 | 8 $\frac{1}{6}$ | |
| 4 | 2 | 6 | 10 | 10 $\frac{11}{12}$ | |

Ce produit est 9 toises quarrées, 8 pouces, 6 points de toise quarrée, que vous multiplierez par 2 pieds, 11 pouces, qui expriment la seconde dimension; mais comme 2 pieds ne sont qu'une partie de toise, & que l'on n'a pas la valeur de la toise, on la supposera, c'est à-dire, on imaginera que 9 toises

quarrées, 8 pouces, 6 points de toiſe quarrée ſont multipliés par 1 toiſe, afin d'avoir 9 toiſes cubes, 8 pouces, 6 points de toiſe cube, dont on prendra le tiers pour la valeur de 2 pieds : c'eſt 3 toiſes cubes, 2 pouces, 8 lignes, 2 points de toiſe cube. Il s'agira enſuite de multiplier le produit C par 11 pouces que l'on partagera en trois parties 6, 3, 2, & l'on prendra d'abord pour 6 pouces ; ( c'eſt le quart de la valeur de 2 pieds ) ainſi l'on écrira 4 pieds, 6 pouces, 8 lignes, $\frac{f}{2}$ point de toiſe cube, dont on prendra la moitié = 2 pieds, 3 pouces, 4 lignes, $\frac{1}{4}$ de point de toiſe cube, pour la valeur de 3 pouces : il ne reſtera plus que 2 pouces qui ſont le tiers de 6 pouces ; ce tiers produira 1 pied, 6 pouces, 2 lignes, 8 points $\frac{1}{8}$ de toiſe cube, qui ſont la troiſieme partie de la valeur de 6 pouces. Faiſant enfin l'addition des quatre produits qui ſont ſous la derniere ligne, on trouvera que la ſolidité du priſme propoſé eſt 4 toiſes cubes, 2 pieds, 6 pouces, 10 lignes, 10 points $\frac{11}{12}$ de toiſe cube.

## PROBLÊME.

411. La longueur d'un parallélipipède = 5 pieds, 9 pouces, 6 lignes. Sa largeur eſt de 2 pieds, 4 pouces, 3 lignes ; & ſon épaiſſeur = 3 pieds, 6 pouces. Quelle eſt la ſolidité de ce corps ?

## RÉSOLUTION.

Diſpoſez ces trois dimenſions comme ci-deſſous.

OPÉRATION.

| Pieds. | Pouces. | Lignes. | Points. | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 9 | 6 | 0 | |
| 2 | 4 | 3 | 0 | |
| 3 | 6 | | | |
| 5 | 9 | 6 | 0 | |
| 2 | 4 | 3 | 0 | |
| 1 | 11 | 2 | 0 | |
| 0 | 3 | 10 | 4 | |
| | 0 | 11 | 7 | |
| | | 1 | 10 $\frac{3}{4}$ | |
| 2 | 3 | 3 | 2 $\frac{3}{4}$ | (M) |
| 3 | 6 | | | |
| 1 | 1 | 7 | 7 $\frac{3}{8}$ | |
| 0 | 2 | 5 | 3 $\frac{1}{6}$ | |
| | | | $\frac{1}{16}$ | |
| 1 | 3 | 10 | 10 $\frac{29}{48}$ | |

Et après avoir trouvé le produit M des deux premieres, qui est 2 pieds, 3 pouces, 3 lignes, 2 points $\frac{3}{4}$ de toise quarrée, vous multiplierez ce produit par la troisieme dimension, c'est-à-dire, par 3 pieds, 6 pouces. Pour y parvenir, on supposera que l'on ait à multiplier le produit M par une toise; ce qui donneroit 2 pieds, 3 pouces, 3 lignes, 2 points & $\frac{3}{4}$ de toise cube: mais, comme il s'agit de multiplier par 3 pieds, on ne prendra que la moitié du produit M, c'est 1 pied, 1 pouce, 7 lignes, 7 points & $\frac{3}{8}$ de toise cube. Il faut encore multiplier par 6 pouces, c'est-à-dire, par la sixieme partie de 3 pieds; on prendra donc la sixieme partie de la

valeur de 3 pieds, qui eſt 2 pouces, 3 lignes, 3 points $+\frac{1}{6}+\frac{1}{16}$ de toiſe cube. On fera l'addition des deux derniers produits, & l'on trouvera que la ſolidité du corps propoſé = 1 pied, 3 pouces, 10 lignes, 10 poinſts de toiſe cube $+\frac{29}{48}$ de point de la même toiſe.

## EXAMEN DE LA MÉTHODE DES INDIVISIBLES.

412. COMME mon deſſein a été de rendre la Géométrie la plus aiſée qu'il me ſeroit poſſible, j'ai fait uſage des moyens qui pouvoient le plus y contribuer. Ceux qui ont médité ſur la meſure des ſolides, ont mis avec raiſon cette partie de la Géométrie au nombre des plus profondes; elle a valu au grand Archimede l'honneur ſi rare, unique peut-être, d'avoir été mis par ſes propres rivaux au premier rang des Mathématiciens.

Cependant je n'ai pas cru devoir conduire d'abord par ces routes ceux que j'ai ici en vûe; c'eût été leur ſuppoſer des forces acquiſes; & des inſtitutions ne ſont faites que pour apprendre l'art d'en acquérir, en faiſant l'eſſai du peu que l'on en a.

La méthode des Indiviſibles a prévenu beaucoup de Géometres en ſa faveur, & moi-même, pour la faire bien connoître, j'en ai fait uſage, à cauſe de l'extrême facilité qu'il y a de la concevoir. Elle ne ſuppoſe aucune Géométrie, aucunes réflexions préliminaires. Ce ſont, pour ainſi dire, les yeux qui en font la démonſtration. Voulez-vous que l'on démontre que les parallélogrammes ABCD, GMST (*fig.* 138.) de même baſe & de même hauteur, ſont égaux en ſurface? concevez que ces parallélogrammes ſoient entiérement couverts d'une

multitude de lignes égales & paralleles à leur base. La ſomme de ces lignes d'une part n'eſt pas différente de la ſurface du parallélogramme qu'elles compoſent; par conſéquent, s'il y a autant de lignes dans le parallélogramme A B C D qu'il y en a dans le parallélogramme G M S T, comme elles ſont d'ailleurs ſuppoſées égales, chacune à chacune, il faudra bien convenir que ces deux parallélogrammes ſont égaux, puiſqu'ils contiendront un même nombre de parties égales. Or il eſt évident que le nombre des lignes qui compoſent A B C D, eſt égal au nombre des lignes dont réſulte G M S T: car la ſomme des lignes compoſantes de part & d'autre eſt renfermée dans le même eſpace parallele, dont l'étendue ſe meſure ſur la perpendiculaire C B = O T.

Les deux parallélogrammes A B C D, G M S T ſont donc compoſés d'un même nombre de parties égales; ainſi ils ſont entiérement égaux: C. Q. F. D.

On s'eſt conduit ſur le même principe pour démontrer que les priſmes ou les pyramides de même baſe & de même hauteur avoient des ſolidités égales. Par la démonſtration que nous en avons donnée (n°. 372), vous avez vû qu'en coupant les deux pyramides (*fig.* 127.) dans tous les points de leur hauteur par des plans paralleles à leur baſe; vous avez vû, dis-je, qu'il en naiſſoit des ſurfaces ou des tranches toujours égales à leurs correſpondantes, chacune à chacune. Et comme ces tranches, qui compoſent les pyramides de part & d'autre, ſont en même nombre, on a conclu encore que les pyramides de même baſe & de même hauteur avoient une égale ſolidité, parce qu'elles étoient compoſées d'un même nombre de parties égales.

On a oppoſé contre cette méthode, qu'il étoit impoſſible qu'une ſurface fût compoſée de lignes ſans aucune largeur, & que la ſolidité d'un corps

pût

pût réſulter de pluſieurs ſurfaces miſes les unes ſur les autres. Vous prouvez très géométriquement, a-t-on dit aux partiſans de Cavalieri, que les tranches correſpondantes des pyramides de même baſe & de même hauteur ſont égales. On peut même vous accorder qu'il y a de part & d'autre un égal nombre de tranches; mais des tranches & des ſurfaces peuvent-elles jamais compoſer une épaiſſeur? Si cela eſt, il faudra avouer qu'un corps eſt compoſé de ſurfaces, ou donner aux ſurfaces compoſantes une petite épaiſſeur; mais qu'eſt ce, je vous prie, qu'une ſurface épaiſſe? Une vraie contradiction. D'ailleurs un compoſé de ſurfaces ne ſauroit produire que des ſurfaces.

J'ai pourtant trouvé quelques perſonnes très-éclairées, qui m'ont avoué qu'elles concevoient très-clairement que les ſurfaces compoſoient les ſolides. Il eſt vrai que beaucoup d'autres non moins attentives, ne ſauroient l'imaginer. Ceci fonde déja un doute très légitime. Tâchons donc de fournir de bonnes raiſons aux unes, en découvrant le paralogiſme des autres.

La ſeule maniere dont on pourroit concevoir que des ſurfaces viendroient à compoſer un ſolide, c'eſt qu'elles fuſſent poſées immédiatement les unes ſur les autres: or il eſt impoſſible de diſpoſer de cette façon plus de deux ſurfaces. Prenez-en trois: mettez l'une des trois entre les deux autres; celle du milieu touchera l'inférieure au deſſous, & la ſupérieure au-deſſus; elle ſera donc compoſée de deux ſurfaces qui auront entre elles quelque diſtance; mais deux ſurfaces attachées enſemble, qui laiſſent entre elles quelque diſtance, compoſent un vrai ſolide, en regardant comme un tout ces ſurfaces & la diſtance qui les ſépare. On a donc ſuppoſé l'impoſſible, quand on a demandé que l'on mît une ſurface

immédiatement entre deux ſurfaces : or, ſi l'on ne peut pas mettre une ſurface immédiatement entre deux ſurfaces, on n'en pourra jamais faire réſulter un ſolide, qui n'eſt autre choſe, ainſi que le prétendent les *Indiviſibiliſtes*, qu'un aſſemblage de ſurfaces poſées immédiatement les unes ſur les autres.

Il n'eſt pas beſoin de développer davantage les conſéquences abſurdes qui naiſſent de cette ſuppoſition. La plus grande partie des Sectateurs de Cavalieri en conviennent.

Cependant ils n'abandonnent pas la theſe. Au lieu de tranches ſuperficielles, vous n'avez qu'à ſuppoſer, diſent-ils, des ſolides d'une épaiſſeur infiniment petite, & vous ſerez pleinement ſatisfaits: car des ſolides pourront apparemment compoſer un ſolide.

Depuis cette réponſe, il paroît que l'on n'a plus inquiété les Partiſans des *Indiviſibles*, & que leurs principes ont acquis toute l'autorité des premiers axiomes. Cette autorité s'eſt d'autant plus fortifiée, que les *Indiviſibles* aboutiſſent à des concluſions qui ſont démontrées à la rigueur par des voies inconteſtables. Un rapport ſi juſte pourroit-il être la production d'un faux principe ?

Reprenons la démonſtration des *Indiviſibiliſtes*. Les pyramides de même baſe & de même hauteur ont un même nombre de tranches, on l'accorde. Il eſt démontré géométriquement que toutes les tranches de l'une ſont égales à toutes les tranches de l'autre, chacune à chacune ; on en convient. Or les pyramides ſont compoſées de ces tranches. Il eſt bon de s'expliquer. Sont-ce des tranches ſuperficielles? Les défenſeurs des *Indiviſibles* en ont reconnu l'impoſſibilité. Il faut donc que ce ſoient des tranches ſolides qui compoſent les pyramides ; ainſi il reſte à démontrer que ces tranches ſolides ſont

égales, chacune à chacune. Les *Indiviſibiliſtes* le ſuppoſent; leur démonſtration eſt donc une pétition de principe.

A la vérité ils prouvent à la rigueur que les baſes entre leſquelles ſont compriſes les petites tranches élémentaires ou les petites pyramides tronquées, ont une égalité correſpondante; mais c'eſt changer l'état de la queſtion. Je demande que l'on m'établiſſe une égalité de ſolides, & l'on n'aboutit qu'à une égalité de ſurfaces. Quel paralogiſme!

Je conviendrai tant qu'on voudra que ces tranches élémentaires correſpondantes ont une épaiſſeur infiniment petite; mais prouvez-moi que chaque tranche infiniment petite eſt égale en ſolidité à ſa correſpondante: car c'eſt là préciſément l'expoſé de la propoſition.

On voit maintenant pourquoi la méthode des *Indiviſibles fait* parvenir à des vérités démontrées d'ailleurs; c'eſt qu'il eſt fort aiſé de trouver ce que l'on ſuppoſe.

Ainſi ceux qui ſe conduiſent par cette méthode, tombent dans une pétition de principe, ou dans un paralogiſme. S'ils ſuppoſent que les petites tranches élémentaires correſpondantes ont une égale ſolidité, c'eſt préciſément l'état de la queſtion. Si, après avoir démontré l'égalité des ſurfaces qui terminent ces tranches au-deſſus & au-deſſous, on en déduit l'égalité de ces petits ſolides, il y un a paralogiſme inconcevable; on paſſe de l'égalité de quelques portions de ſurfaces à l'égalité entiere des ſolidités.

Enfin voici une Démonſtration auſſi rigoureuſe qu'aucune que je ſache en Géométrie, par laquelle on va voir que, ſi les raiſons des *Indiviſibiliſtes* étoient légitimes, deux cônes, l'un droit & l'autre oblique, de même baſe & de même hauteur, auroient leurs ſurfaces convexes égales; ou que deux

pyramides EK, EP, à baſes quarrées (*fig.* 127), l'une droite & l'autre inclinée, de même baſe & de même hauteur, ſeroient égales en ſurface. Ce que l'on pourra appliquer aux priſmes, aux parallélipipèdes, aux cylindres.

DÉM. Comme on peut faire autant de coupes parallèles aux baſes K, P dans la pyramide EK, que dans la pyramide EP (de l'aveu des *Indiviſibiliſtes*); que chaque coupe *s* de l'une eſt non ſeulement égale à chaque coupe *p* correſpondante de l'autre (par la Dém. du n°. 372), mais encore eſt un polygone ſemblable à ſa baſe correſpondante (371); les baſes K, P étant des quarrés égaux (ſupp.), les petites coupes *s*, *p* ſeront auſſi néceſſairement des quarrés égaux: ce qu'il faut dire de toutes les autres coupes correſpondantes, que l'on pourra faire dans l'intervalle des parallèles EC, LD; par conſéquent les circuits de ces quarrés ſeront égaux; donc, puiſqu'il y a autant de circuit d'une part que d'autre, (ſupp.) la ſomme des valeurs des circuits d'une part ſera égale à la ſomme des valeurs des circuits de l'autre part: mais chaque ſomme de circuit couvre la ſurface de ſa pyramide correſpondante; donc, puiſque (ſuivant les *Indiviſibiliſtes*) on peut évaluer les ſurfaces par les lignes qui les couvrent, & qu'il y a de part & d'autre un même nombre de lignes égales ou de circuits égaux, c'eſt une néceſſité que les ſurfaces ſoient auſſi égales.

Cependant tous les Géometres ſavent, & il eſt très aiſé à démontrer, que la ſurface de la pyramide inclinée P eſt plus grande que celle de la pyramide droite K, de même baſe & de même hauteur.

Il me ſemble que ſi les *Indiviſibiliſtes* veulent examiner de bonne foi la force de cette démonſtration, ils avoueront qu'elle eſt péremptoire; où,

pour le moins, que leur méthode eſt très ſujette à conduire à de grands paralogiſmes : ce qui eſt un vrai ſcandale en Géométrie. Meſſieurs les *Indiviſibiliſtes* ſont donc très fortement invités, ou à paſſer courageuſement condamnation ſur leur méthode, ou à nous dire par quels nouveaux étais on peut la ſoutenir.

Prenez bien garde que les raiſons que je viens d'alléguer contre les *Indiviſibiliſtes*, n'attaquent point au fonds *la méthode des Indiviſibles*. Peut-être que cette méthode bien analyſée ne ſeroit pas différente de la *méthode d'exhauſtion ;* mais c'eſt à quoi je ne veux pas toucher. Je me ſuis propoſé ſeulement d'examiner les raiſons ſur leſquelles on la fonde ; elles m'ont paru ſi foibles, que, ſi je n'avois pas ſu d'ailleurs comment on établiſſoit rigoureuſement la meſure des ſurfaces & celle des ſolides, je croirois encore très fermement que les élémens de Géométrie ne ſont point démontrés. Une propoſition a beau être vraie ; ſi on la fonde ſur des ſuppoſitions fauſſes, ou ſur des idées qui ne ſont pas claires, elle appartient en propre à la faculté de douter.

Comme la plupart des lecteurs ſont plus portés à oppoſer de nouvelles difficultés qu'à réſoudre celles qu'on leur fait, on ne manquera pas de me dire que j'infirme le principe du calcul différentiel & intégral. Mais je prie ceux qui ſeront tentés de me faire cette objection, de s'expliquer là deſſus d'une maniere claire & intelligible ; & je promets d'apporter à l'examen de leurs raiſons toute la circonſpection qu'exige l'importance du ſujet ; car il m'eſt impoſſible ici de répondre à des raiſons que je ne connois pas. Le vrai principe du calcul différentiel m'a toujours paru ſi indépendant de la méthode *des Indiviſibles*, que la penſée de ceux qui y trouvent

une identité parfaite, m'eſt entiérement inconcevable.

Mais s'il falloit des autorités dans une queſtion où l'on doit être à ſoi-même ſa propre lumiere, je ſupplierois que l'on fît attention à ces paroles de l'Archimede moderne, l'incomparable M. Newton. *Contractiores..... redduntur demonſtrationes per methodum indiviſibilium : ſed quoniam durior eſt indiviſibilium hypotheſis, & propterea methodus illa minùs Geometrica cenſetur, malui demonſtrationes rerum ſequentium ad ultimas quantitatum evaneſcentium ſummas & rationes, primaſque naſcentium, id eſt, ad limites ſummarum & rationum deducere, &c..... Proindè in ſequentibus, ſi quandò quantitates tanquam ex particulis conſtantes conſideravero, vel ſi pro rectis uſurpavero lineas curvas, nolim indiviſibilia, ſed evaneſcentia diviſibilia ; non ſummas & rationes partium determinatarum, ſed ſummarum & rationum limites ſemper intelligi, &c.* (*a*). Tout cet endroit de M. Newton eſt fort précis.

M. d'Alembert, de l'Académie Royale des Sciences, va plus loin encore dans ſon Traité de *Dynamique*, Ouvrage qui feroit beaucoup d'honneur à ceux qui ſeroient ſeulement ſoupçonnés d'en être les Auteurs après vingt ans d'une profonde méditation. *La Méthode des Infiniment petits a un inconvénient ; c'eſt que les Commençans, qui n'en pénètrent pas toujours l'eſprit, pourroient s'accoutumer à regarder ces Infiniment petits comme des réalités : c'eſt une erreur contre laquelle on doit être d'autant plus en garde, que de grands hommes y ſont tombés, & qu'elle a même donné occaſion à quelques mauvais Livres contre la certitude de la Géométrie. La Méthode des Infiniment petits n'eſt autre choſe que la Mé-*

(*a*) Voyez la Section premiere du premier Livre des principes de M. Newton, au Scol. du Lemm. XI.

*thode des raiſons premieres & dernieres, c'eſt à dire, des rapports des quantités qui naiſſent, ou qui s'évanouiſſent* (*a*).

Je ne cite des témoins auſſi reſpectables, que pour rendre un peu plus retenus ceux qui auroient le deſſein d'entrer en lice.

Puis donc que la méthode des *Indiviſibiliſtes* eſt inſuffiſante, il paroît que je ne ſaurois me diſpenſer de produire une autre maniere de démontrer la meſure des ſolides. Je rendrai un bon ſervice aux gens âpres au travail, à ces eſprits vigoureux, qui dans les recherches les plus épineuſes ne redoutent que l'incertitude des principes. *Les Indiviſibles* pourront toujours être de quelque utilité à cette multitude de Lettrés plus avides de parler que curieux de ſavoir, qui voudroient s'amuſer de ſcience ſans qu'une application ſuivie leur en eût acquis le droit.

## CHAPITRE IV.

## DE LA SOLIDITÉ DES CORPS, ſelon la Méthode des Anciens, appellée *Méthode d'Exhauſtion* (*b*).

413. CETTE méthode nous oblige à un ordre de Propoſitions différent de celui que nous avons ſuivi dans le Chapitre précédent; mais comme l'on eſt déja un peu préparé à cette matiere, on nous permettra d'être plus courts, pourvu que la clarté n'en ſouffre pas.

(*a*) Traité de Dynamique, page 36, imprimé chez David l'aîné, en 1743.

(*b*) On verra (n°. 425.) pourquoi on lui a donné ce nom.

### PROPOSITION PREMIERE.

414. Les Prîſmes triangulaires droits ou également inclinés, de hauteur égale, & dont les baſes ſont égales & ſemblables, ſont égaux en ſolidité.

### DÉMONSTRATION.

Conſidérez le parallélipipede droit ABCDGHMF (*fig.* 132) coupé par le plan diagonal BDMG; il eſt évident que les deux Priſmes triangulaires ABDFGM, BDCGMH ſont égaux en ſolidité, puiſque toutes les dimenſions de l'un, ſes baſes & ſes faces étant égales & ſemblables à toutes les faces, baſes & dimenſions de l'autre, chacune à chacune, l'un de ſes Priſmes ſe trouve préciſément déterminé de la même maniere que l'autre: ainſi, comme ces Priſmes ne different en rien, leur ſolidité eſt parfaitement égale.

Si vous appliquez ce même raiſonnement au parallélipipede oblique *abcdghmf* coupé par le plan diagonal *bdmg*, vous concevrez facilement que le Priſme triangulaire oblique *abdfgm* eſt égal en ſolidité au Priſme triangulaire oblique *bdcgmh*; C. Q. F. D.

### PROPOSITION II.

415. Les parallélipipedes de même baſe & de même hauteur ont une ſolidité égale. (*fig.* 139.)

### DÉMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que le parallélipipede droit BCDEOGHA eſt égal en ſolidité au parallélipipede oblique BCDEPLMT appuyé ſur la même baſe BCDE, & qui eſt de même hauteur, ou qui eſt ſitué entre les mêmes plans paralleles BCDE, AQLM.

Remarquez d'abord que ces deux parallélipipedes ont une partie commune, qui eſt le ſolide BCPTEDGH: ainſi il reſte à démontrer que le Priſme triangulaire COPBAT eſt égal en ſolidité au Priſme triangulaire DGLEHM; mais ces deux Priſmes droits ont des baſes & des hauteurs égales: car on voit que la baſe AOPT du premier eſt égale à la baſe HGLM du ſecond; ces deux Priſmes d'ailleurs ſont ſitués entre les mêmes plans paralleles; ils ſont par conſéquent égaux en ſolidité. (Prop. I. n°. 414.) Donc les deux parties du parallélipipede droit BCDEOGHA ſont égales aux deux parties du parallélipipede oblique BCDEPLMT; par conſéquent un parallélipipede droit eſt égal en ſolidité à un parallélipipede oblique de même baſe & de même hauteur; C. Q. F. D.

## PROPOSITION III.

416. On trouve la ſolidité d'un parallélipipede droit ou oblique, en multipliant ſa baſe par ſa hauteur.

## DÉMONSTRATION.

Elle eſt la même que celle que nous avons donnée (n°. 383.), en ſuppoſant que le parallélipipede ſoit droit.

Mais s'il eſt oblique, il n'y aura qu'à imaginer un parallélipipede droit de même baſe & de même hauteur. On en trouvera la ſolidité par le n°. 383. qui ſera la même que celle du parallélipipede oblique. (Prop. 2. n°. 415.)

## PROPOSITION VI.

417. Les parallélipipedes quelconques qui ont des baſes & des hauteurs égales, ſont égaux en ſolidité.

## DÉMONSTRATION.

Car (Prop. 3. n°. 416.) on en auroit la ſolidité, en multipliant leur baſe par leur hauteur : or (ſupp.) les baſes & les hauteurs ſont égales de part & d'autre, chacune à chacune ; donc les produits ſeroient égaux ; ce qui indique une égale ſolidité.

### PROPOSITION V.

418. Les Priſmes triangulaires quelconques, droits ou obliques, qui ont une égale hauteur, & des baſes égales, (ſans les ſuppoſer ſemblables, comme on a fait dans la première Propoſition) ſont égaux en ſolidité.

## DÉMONSTRATION.

Conſidérez les figures 152 : il eſt clair que les Priſmes triangulaires BCDGHM, *bcdghm* ſont chacun moitié des parallélipipedes, dont les baſes & les hauteurs ſont égales : or, ces parallélipipedes ſont égaux (Prop. 4. n°. 417.) ; donc leurs moitiés, c'eſt-à-dire, les Priſmes triangulaires propoſés ſont auſſi égaux en ſolidité ; C. Q. F. D.

### *COROLLAIRE.*

419. On détermine la ſolidité des parallélipipedes, en multipliant leur baſe parallélogramme par leur hauteur ; on aura donc la ſolidité de leurs moitiés, c'eſt-à-dire, des Priſmes triangulaires, en multipliant la moitié de leur baſe parallélogramme par leur hauteur : or la moitié de leur baſe parallélogramme eſt la baſe triangulaire d'un Priſme triangulaire. Par conſéquent on détermine auſſi la ſolidité d'un Priſme triangulaire, en multipliant ſa baſe triangulaire par ſa hauteur. On n'a qu'à jetter un

coup d'œil sur les figures 132. n°. 384. cette vérité devient évidente.

### PROPOSITION VI.

420. Les Prismes polygones quelconques, qui ont des bases & des hauteurs égales, ont une égale solidité.

### DÉMONSTRATION.

Car, de même que l'on peut diviser en Triangles égaux des Polygones égaux, l'on peut aussi diviser les Prismes polygones, qui ont des bases & des hauteurs égales, en un même nombre de Prismes triangulaires, de même base & de même hauteur. Or (Prop. 5. n°. 418.) les Prismes triangulaires, dont les bases & les hauteurs sont égales, ont une égale solidité; donc les Prismes polygones quelconques, qui ont des bases & des hauteurs égales, sont aussi égaux; C. Q. F. D.

### *COROLLAIRE.*

421. Puisque l'on trouve la solidité des Prismes triangulaires, en multipliant leur base par leur hauteur (n°. 419), on déterminera aussi la solidité d'un Prisme polygone quelconque, en faisant le produit de sa base par sa hauteur, à cause que ce Prisme polygone peut être réduit en Prismes triangulaires.

### PROPOSITION VII.

422. Les Prismes polygones quelconques de même hauteur, sont entre eux comme leur base.

### DÉMONSTRATION.

Appellons P, $p$ les deux Prismes que nous comparons; B, $b$ leurs bases; H, $h$ leurs hauteurs.

On aura (Coroll. précéd.) $P = BH$, & $p = bh$; donc $P.p :: BH.bh$: or $H = h$ (supp.); ainſi $P.p :: B.b$. On prouveroit de la même maniere que les Priſmes polygones quelconques de même baſe, ſont entre eux comme leur hauteur; C. Q. F. D.

J'ai paſſé rapidement ſur ces Propoſitions préliminaires, afin d'en venir à l'importante Démonſtration, où l'on établit l'égalité des pyramides qui ont des baſes & des hauteurs égales. C'eſt ici que la méthode des Anciens va ſe manifeſter.

## *LEMME PREMIER.* (*a*)

423. Si l'on inſcrit & ſi l'on circonſcrit ſans fin un très grand nombre de Parallélogrammes à une figure plane quelconque, je dis que la ſomme des Parallélogrammes inſcrits différera de la ſomme des Parallélogrammes circonſcrits, moins que d'une ſurface donnée quelconque, ſi petite qu'elle puiſſe être.

## DÉMONSTRATION.

Diviſez la baſe BC (*fig.* 140.) du triangle ABC en autant de parties égales que vous voudrez. Aux points de diviſion élevez les perpendiculaires *os*, *xt*, &c. les Rectangles tels que *AoSB*, *mxts* ſont dits *circonſcrits* au triangle ABC; & les Rectangles *rmSB*, *pytS*, &c. ſont *inſcrits* au même triangle. Il s'agit de prouver que la ſomme des circonſcrits peut différer de la ſomme des inſcrits, moins que d'une ſurface donnée quelconque.

Il eſt évident que la ſomme des circonſcrits ne ſurpaſſe la ſomme des Rectangles inſcrits que du rectangle AOSB: or, en diviſant continuellement la baſe BC en un plus grand nombre de par-

(*a*) *Lemme*, c'eſt une Propoſition iſolée qui prépare à la ſuivante.

ties égales, le Rectangle AOSB (c'eſt-à dire, la différence des Rectangles circonſcrits aux inſcrits) deviendra toujours plus petit; mais une grandeur, qui diminue toujours, devient enfin plus petite qu'une grandeur donnée quelconque, qui ne diminue point: ainſi la différence des Rectangles circonſcrits aux inſcrits peut devenir inaſſignable, & par conſéquent être plus petite qu'aucune grandeur donnée; C. Q. F. D.

M. Newton, qui goûtoit fort la méthode des Anciens, donne ce Lemme. Je pouvois m'en paſſer; mais ſon extrême facilité me l'a fait choiſir, pour préparer l'eſprit à l'intelligence de celui qui va ſuivre.

## *COROLLAIRE.*

424. La ſomme des Rectangles inſcrits ou celle des circonſcrits peut être telle, que ſa différence avec le triangle ABC ſoit inaſſignable; de ſorte que la ſomme des circonſcrits, celle des inſcrits & le triangle deviendront égaux en dernier reſſort.

Car la limite de l'augmentation de la ſomme des inſcrits eſt le triangle ABC, qui eſt auſſi la limite de la diminution de la ſomme des circonſcrits; c'eſt à dire, que la ſomme des inſcrits ne ſauroit devenir plus grande que le triangle dont elle peut approcher de plus en plus, & que la ſomme des circonſcrits ne peut pas auſſi devenir plus petite que le triangle à l'égalité duquel elle tend ſans ceſſe; par conſéquent les deux ſommes tendent ſans fin à l'égalité du même triangle; elles en approcheront donc ſi près, que leur différence du triangle ſera inaſſignable, & pourra ſans aucun inconvénient être regardée comme nulle: ainſi la ſomme des Rectangles circonſcrits, celle des inſcrits & le triangle deviendront égales en dernier reſſort.

## LEMME II.

425. Inſcrivons à une pyramide triangulaire un très grand nombre de Priſmes triangulaires. Je dis que leur ſomme ſe confondra enfin avec la pyramide, ou que la ſolidité totale de ces Priſmes inſcrits ne ſera pas différente de celle de la pyramide. (*fig.* 141.)

## DÉMONSTRATION.

Concevez donc que la ligne *af* qui repréſente la hauteur de la pyramide *af* K L, ſoit diviſée en un très grand nombre de parties égales par des plans paralleles à la baſe *f* K L de la pyramide (on la ſuppoſe ici diviſée en quatre parties égales ſeulement, afin d'éviter la confuſion qui naîtroit d'un plus grand nombre de parties); & repréſentez-vous que l'on ait inſcrit à la pyramide les Priſmes triangulaires *hc*, *od*, *rf*, dont les faces ſupérieures continuées produiſent les Priſmes triangulaires *sf*, *pd*, *mc* circonſcrits, & de même hauteur que les inſcrits: joignez-y le Priſme circonſcrit *gb* de même hauteur que les précédens. Il eſt viſible que la différence des Priſmes circonſcrits aux inſcrits eſt la ſomme des ſolides *gb*, *mt*, *px*, *sy*: or cette ſomme eſt égale au ſeul Priſme circonſcrit *sf*. Car les Priſmes de même baſe & de même hauteur étant égaux (n°. 420.), $gb = hc$; donc $gb + mt = hc + mt =$ le Priſme total *mc* qui eſt compoſé de ces deux ſolides: ainſi $gb + mt = mc$: mais $mc = od$ de même baſe & de même hauteur; donc $mc + px = od + px =$ le Priſme total *pd*; par conſéquent $gb + mt + px = pd$: or $pd = rf$; donc $pd + sy = rf + sy =$ le Priſme total *sf*; donc enfin $gb + mt + px + sy = sf$; c'eſt-à-dire, que la différence de la ſomme des

Prismes circonscrits à la somme des Prismes inscrits est égale au seul Prisme circonscrit *sf*. Mais, en divisant la hauteur *af* en un très grand nombre de parties, le Prisme *sf* peut devenir plus petit qu'aucune grandeur donnée, & dans ce cas la différence des Prismes inscrits aux Prismes circonscrits seroit inassignable : or ces Prismes, tant les inscrits que les circonscrits, tendent à l'égalité avec la pyramide qui est la limite des uns & des autres. (Lemme I. n°. 423.) Donc, dans une division poussée très loin, la somme des Prismes inscrits approche si près de la pyramide entiere, que leur différence s'évanouit ; par conséquent la somme des Prismes inscrits est égale en solidité à celle de la pyramide, ou, si l'on veut, n'en differe que d'une quantité inassignable ; C. Q. F. D.

On doit s'attacher à bien comprendre ce Lemme, où tout le fonds de la méthode des Anciens est entiérement manifesté : elle consiste, comme l'on voit dans ce cas particulier, à inscrire ou à circonscrire à la pyramide un nombre si énorme de Prismes, que l'inscription ou la circonscription en soit, pour ainsi dire, épuisée ; c'est ce qui lui a fait donner le nom de *méthode d'exhaustion* (*a*). Nous aurons peut-être occasion quelque jour de faire voir que l'application du calcul différentiel & intégral remonte à cette méthode ; mais ce qui nous importe ici, c'est de l'appliquer à la mesure de la pyramide.

## PROPOSITION VIII.

426. Les pyramides triangulaires de même hauteur sont entre elles comme leurs bases.

## DÉMONSTRATION.

Soient les deux pyramides A B C D, *a b c d*, (*fig.* 142.) dont les hauteurs égales A D, *a d*

(*a*) *Exhaustion.* Ce mot vient du Latin *exhaustio*, épuisement.

soient divisées en un même nombre de parties égales par les points de division, imaginez de part & d'autre des plans paralleles à la base ; concevez de plus que l'on ait inscrit à chaque pyramide un même nombre de Prismes triangulaires qui aient une égale hauteur : si ce nombre de Prismes triangulaires inscrits est multiplié sans fin, leur somme ne sera pas différente de la solidité de la pyramide à laquelle ils appartiennent ( Lem. 2. n°. 425.) ; par conséquent si l'on démontre que chaque Prisme de la pyramide ABCD est à chaque Prisme correspondant de l'autre pyramide *abcd*, comme la base BCD de la premiere est à la base *bcd* de la seconde, il est clair que la somme des Prismes d'une part, sera à la somme des Prismes de l'autre part, c'est-à-dire que la solidité d'une pyramide sera à la solidité de l'autre, comme la base de la premiere est à la base de la seconde.

Prenons donc les deux Prismes OT ; *ot* correspondans. Par la construction, ces deux Prismes ont même hauteur, & par conséquent ils sont entre eux comme leurs bases (n°. 422.) ; ainsi le Prisme OT triangulaire est au Prisme triangulaire *ot*, comme la base OPM est à la base *opm* : mais, à cause des sections paralleles, les triangles OPM, *opm* sont semblables à leur base correspondante BCD, *bcd* ; par conséquent $OPM.BCD :: \overline{PM}.\overline{CD} :: \overline{AM}.\overline{AD} :: \overline{am}.\overline{ad} :: \overline{pm}.\overline{cd} :: opm.bcd$ (n°. 306.) ; ainsi $OPM.BCD :: opm.bcd$ ; donc, puisque le Prisme OT est au Prisme *ot* de même hauteur, comme OPM est à *opm*, on aura aussi $OT.ot :: BCD.bcd$.

On prouvera de même que $RH.rh :: BCD.bcd$, & que $SD.sd :: BCD.bcd$ : ainsi le rapport d'un Prisme à son correspondant est égal au

rapport

rapport de tout autre Prisme à son correspondant. Par conséquent OT. *ot* :: RH. *rh* :: SD. *sd*; donc, OT + RH + SD. *ot* + *rh* + *sd* :: OT. *ot* (n°. 258.) :: BCD. *bcd*; c'est-à-dire, que la somme des Prismes inscrits à la pirámide ABCD est à la somme des inscrits à l'autre pirámide *abcd*, comme la base de la premiere est à la base de la seconde : mais (n°. 425.) la somme des Prismes inscrits se confond avec la pirámide qui en est composée, ou n'en diffère que d'une quantité inassignable ; donc enfin la pirámide ABCD est à la pirámide *abcd* de même hauteur, comme la base BCD est à la base *bcd*; C. Q. F. D.

## PROPOSITION IX.

427. En général, les pirámides de même hauteur sont entr'elles comme leurs bases, de quelque figure que ces bases puissent être (*fig.* 143.).

## DÉMONSTRATION.

Considérez la pirámide héxagonale ABCDF, & la pirámide quadrangulaire *abcd* de même hauteur que l'héxagonale. Divisez leur base en Triangles, afin de résoudre l'une & l'autre pirámide en pirámides triangulaires. Appellons P la pirámide héxagonale, B sa base BCDFGH. Soit aussi nommée *p* la pirámide quadrangulaire, & *b* sa base *bcdf*: il s'agit de prouver que P. *p* :: B. *b*.

1°. Par la Proposition 8. n°. 426. les pirámides triangulaires de même hauteur sont entr'elles comme leurs bases ; ou, en alternant, une pirámide triangulaire est à sa base, comme la pirámide triangulaire de même hauteur, qui lui est comparée, est à sa base ; donc ABCH. BCH :: ACGH. CGH :: ACDG. CDG :: ADFG. DFG. Ainsi

(n°. 258.) ABCH + ACGH + ACDG + ADFG (P) . BCH + CGH + CDG + DFG (B) :: ABCH . BCH ; c'eſt-à dire, que l'on a P . B :: ABCH . BCH

2°. Par la même raiſon $abcf . bcf :: acdf . cdf$. Donc (n°. 258.) $abcf + acdf$ (p) . $bcf + cdf$ (b) :: $abcf . bcf$, ou $p . b :: abcf . bcf$: or $abcf . bcf$ :: ABCH . BCH (n°. 426.) :: P . B (Art. 1°.) ; par conſéquent P . B :: $p . b$, ou, en alternant, P . $p$ :: B . $b$ ; c'eſt-à-dire, que les piramides polygones quelconques de même hauteur ſont entr'elles comme leur baſe ; C. Q. F. D.

## PROPOSITION X.

428. Les piramides quelconques de même hauteur & de même baſe, ou de baſes égales, ont une égale ſolidité.

## DÉMONSTRATION.

On vient de voir (Prop. 9. n°. 427.) que les piramides quelconques de même hauteur étoient entr'elles comme leurs baſes : or l'on ſuppoſe les baſes égales ; donc les piramides ſont auſſi égales : ainſi les piramides de même baſe & de même hauteur ont une égale ſolidité ; C. Q. F. D. (*a*).

(*a*) Pour peu que l'on faſſe réflexion ſur la *méthode d'exhauſtion* que les Anciens ont ſuivie, on verra combien elle eſt propre, non ſeulement à éclairer l'eſprit, mais à le conduire à une conviction parfaite ; bien différente en cela de la *méthode des indiviſibles*, qui laiſſe toujours dans l'eſprit cette inquiétude, qui pourſuit & agite ſans relâche ceux qui cherchent la lumiere & ne la trouvent pas : car les *Indiviſibiliſtes*, après avoir établi une égalité de ſurfaces, en déduiſent immédiatement une égale ſolidité entre les corps qui ont ces ſurfaces égales ; comme ſi deux corps ne pouvoient pas avoir des ſurfaces égales, ſans être égaux en ſolidité ; & quand même cela ſeroit, il reſteroit toujours à le démontrer : mais ſuivant la *méthode d'exhauſtion*, on conclut que les piramides de même baſe & de même hauteur ſont égales, parce qu'elles ſont compoſées d'un même nombre de ſolides

Après avoir démontré que les piramides de même baſe & de même hauteur ſont égales en ſolidité, on pourra démontrer, comme dans le Chapitre précédent (n°. 375.), qu'une piramide triangulaire n'eſt que le tiers d'un priſme triangulaire de même baſe & de même hauteur, & en déduire la ſolidité des autres corps, ainſi que nous l'avons exécuté en cet endroit.

429. Mais Saunderſon, Mathématicien Anglois, aveugle preſque de naiſſance (*a*), a trouvé une

démontrés égaux à la rigueur, chacun à chacun; & ſi l'on veut que la ſomme de ces ſolides ne ſe confonde pas entièrement avec la piramide, qui en eſt compoſée, au moins eſt-il démontré à la rigueur que la différence eſt inaſſignable.

(*a*) *Saunderſon..... aveugle preſque de naiſſance.* Voici un fait bien ſingulier; ce n'eſt point une tradition, ce n'eſt point le témoignage unanime des anciens Ecrivains les plus accrédités: c'eſt ce que l'on voyoit encore il y a ſix ans, ce que toute l'Angleterre a pu voir en public pendant près de cinquante-ſix ans; un homme à qui la petite vérole fit perdre la vue à l'âge d'un an, de manière que la ſubſtance même des yeux ne lui reſta pas. Un abſcès la fondit totalement. On a ſçu de lui-même que l'idée de la lumière s'étoit entièrement effacée de ſon eſprit, & que par rapport aux couleurs il étoit préciſément dans le cas d'un aveugle né; & cependant cet homme, indépendamment du Latin, du Grec & du François qu'il ſçavoit très-bien, apprit les Mathématiques, compoſa des Ouvrages en ce genre très eſtimés qui ſont imprimés en langue Angloiſe. Ils m'ont été communiqués par M. l'Abbé Sallier, Garde de la Bibliothéque du Roi, qui fait toujours un très-bon accueil à ceux qui ont envie d'être utiles au public. Enfin cet aveugle parvint à communiquer ſes idées d'une manière ſi claire & ſi préciſe, qu'on le jugea très-capable d'enſeigner publiquement. Il fut Profeſſeur des Mathématiques à Cambridge, fameuſe Univerſité d'Angleterre. On avoue que très-peu de perſonnes ont enſeigné avec plus de ſuccès une ſcience, où les yeux paroiſſent abſolument néceſſaires. Il imagina des machines pour tracer aux yeux de ſes Diſciples toutes les lignes droites ou courbes néceſſaires à ſes Démonſtrations; ce qu'il exécutoit avec une préciſion & une netteté à laquelle il eſt rare d'atteindre, même avec de bons yeux. Ses talens extraordinaires lui valurent l'honneur d'être membre de la Société Royale de Londres. Il mourut en 1739. âgé de cinquante-ſix ans.

Le Lecteur curieux ne manquera pas de demander par quel organe Saunderſon acquit les idées d'étendue, de corps, de nombres, de proportion, &c. Ce fut par le TOUCHER. L'organe de la vue eſt ſi commode, il fait entrer dans notre ame une prodigieuſe quantité d'idées ſi rapidement, que nous négligeons de faire attention à je ne ſçais combien d'idées très-diſtinctes, que nous attendrions inutilement du miniſtère des yeux. Quelques Phyſiciens modernes ont dit que l'organe du TOUCHER étoit le plus groſſier de tous les ſens.

manière très-élégante, pour démontrer que l'on devoit déterminer la ſolidité de la piramide, en multipliant ſa baſe par le tiers de ſa hauteur : nous allons faire connoître la conſtruction & la démonſtration du Mathématicien Anglois.

## PROPOSITION XI.

430. La ſolidité d'une piramide droite ou oblique eſt égale au produit de ſa baſe par le tiers de ſa hauteur (*fig.* 144.).

## DÉMONSTRATION.

I. Soit la piramide droite BCDFG, dont la baſe CDFG eſt un quarré; ſur cette baſe conſtruiſons le cube MC; dont la hauteur AS ſoit dou-

Après la vue, je n'en connois point de plus fin ni plus ſûr. Conſultez les Chirurgiens; ils vous diront que la ſcience du TOUCHER eſt une des parties les plus importantes dans leurs opérations.

Mais c'eſt principalement dans la meſure effective de l'étendue, que le TOUCHER l'emporte en préciſion ſur l'organe de la vûe. Oſeroit-on aſſurer qu'il y a une égalité entière entre deux grandeurs, où les yeux n'apperçoivent aucune différence, ſi l'on n'y mettoit les mains? Les perſonnes attentives n'eſtiment-elles pas les choſes beaucoup plus à la main qu'aux yeux? Qui eſt-ce qui croiroit avoir ſon compte, s'il achetoit un fonds de terre que les yeux ſeuls auroient meſuré? Il n'y a donc que le TOUCHER qui ſoit l'organe propre à déterminer à toute rigueur l'étendue, qui eſt l'objet des Mathématiques.

Je conviens que Saunderſon n'a pas dû ſçavoir autant de Mathématiques qu'un homme ordinaire, doué d'une égale pénétration; parceque le TOUCHER ne s'étend pas auſſi loin, ni auſſi rapidement que la vue; mais il me ſemble qu'il a dû mieux ſçavoir ce qu'il ſçavoit.

C'eſt une expérience conſtante, que nos idées ſont d'autant moins diſtinctes qu'elles ſont plus multipliées, plus fréquentes, plus diverſes, plus variées à la fois : or c'eſt ce que produit l'organe de la vue. Une idée qui nous vient par ce ſens, eſt preſque toujours croiſée par mille autres, qui ſe préſentent avec elle. L'ame a beau les chaſſer, ce ſont des opiniâtres qui ne veulent point ſortir. Me permettra-t-on de le dire? la porte de nos yeux eſt en quelque ſorte trop grande pour ceux qui méditent. Nous ne ſçaurions laiſſer entrer nos idées une à une; ce qui pourtant ſeroit aſſez commode, afin que l'ame n'eût pas en même tems des perceptions mal aſſorties. Mais le TOUCHER ne nous donne, pour ainſi dire, les idées qu'auſſi lentement & qu'à meſure que nous le voulons. L'ame moins ſurchargée en fait plus facilement l'examen. En un mot, elle compte plus juſte, parcequ'elle a moins à compter.

ble de la hauteur BS de la piramide proposée : il est clair que, si du sommet B de la piramide l'on tiroit des lignes à tous les angles de chaque face du cube, il se trouveroit résolu en six piramides de même base & de même hauteur, parce que le sommet B de la piramide est également éloigné de toutes les faces égales du cube ; les six piramides seroient donc égales en solidité (Prop. 10. n°. 428.) : ainsi la piramide BCDFG est la sixiéme partie du cube MC. Or on a la solidité de ce cube, en multipliant sa base CDFG par sa hauteur AS (Prop. 3. n°. 416.) ; par conséquent la solidité de la piramide BCDFG est égale au produit de la base CDFG par la sixième partie de AS, ou par le tiers de sa moitié BS, hauteur de la piramide.

Ainsi, quand une piramide à base quarrée est droite, & que sa hauteur n'est que la moitié du côté de sa base, on en a la solidité en multipliant sa base par le tiers de sa hauteur.

II. Si la piramide L proposée est oblique, à base polygone quelconque & d'une hauteur quelconque, sa base pourra être transformée en un quarré qui lui soit égal (322.) ; ce qui donnera une piramide $p$ à base quarrée, laquelle ayant même hauteur que la précédente L, lui sera égale en solidité (428.). Soit H la hauteur de la piramide $p$, $c$ le côté de sa base quarrée $cc$ ; & imaginez une autre piramide P de même hauteur H que la précédente $p$, mais dont le côté de la base soit égal à 2 H, pour avoir une piramide dans le même cas que celle de l'art. I. & dont la base quarrée soit $= 4\,HH$. Il est clair (art. I.) que la solidité de cette piramide $P = 4\,HH \times \frac{H}{3}$ : or les piramides $p$, P, de même hauteur H, sont entr'elles comme leurs bases $cc$, $4\,HH$ ; (427.)

donc $p . P :: cc . 4HH$, ou (puisque $P = 4HH \times \frac{H}{3}$) $p . 4HH \times \frac{H}{3} :: cc . 4HH$;

d'où l'on tire $p = \frac{4H^2 \times \frac{H}{3} \times cc}{4H^2} = cc \times \frac{H}{3}$; ce qui signifie que la pirámide $p$, de même base & de même hauteur que la supposée L, est égale au produit de sa base $cc$ par le tiers de sa hauteur H.

Ainsi la démonstration de *Saunderson* est générale, ou appliquable à toutes les pirámides quelconques. Elle est incomparablement plus simple que celle qui se déduit de la section du Prisme triangulaire en trois pirámides égales; section qu'il est très difficile d'imaginer dans le solide.

## COROLLAIRE.

431. Dans les pirámides égales, & généralement dans tous les corps égaux en solidité, la base & la hauteur sont en *raison réciproque*.

Quand on compare deux corps, & que la base du premier est à la base du second, comme la hauteur du premier est à la hauteur du second, on dit *que les bases & les hauteurs sont en raison directe*.

Mais si la base du premier est à la base du second, comme la hauteur du second est à la hauteur du premier, alors *les bases & les hauteurs de ces corps sont en raison réciproque*; parce que si la base du premier est plus grande que la base du second, réciproquement la hauteur du second surpasse d'autant la hauteur du premier; ce qui fait une compensation.

Ceci entendu, soient deux pirámides P, $p$, leurs bases B, $b$, & leurs hauteurs H, $h$. Par la proposition précédente, $P = \frac{BH}{3}$ & $p = \frac{bh}{3}$; mais (supp.)

$P = p$. Donc $\frac{BH}{3} = \frac{bh}{3}$ : ainſi $BH = bh$; d'où l'on tire, $B : b :: h . H$. C'eſt-à dire, que la baſe B du premier eſt à la baſe $b$ du ſecond réciproquement, comme la hauteur $h$ du ſecond eſt à la hauteur H du premier.

Nous finirons ici ce Chapitre. Le reſte ſe déduit aiſément de la meſure de la piramide, ainſi qu'on peut le voir au Chapitre précédent, que nous avons traité par la méthode des Indiviſibles, en faveur de ceux qui ne veulent pas approfondir les choſes.

---

## *RECAPITULATION de la Méthode d'Exhauſtion. Confirmation de cette Méthode.*

432. LA méthode d'Exhauſtion conſiſte, ainſi que nous l'avons vû, à faire voir que deux ou pluſieurs quantités ſont égales, quand on ne peut pas leur aſſigner une différence déterminée; enſorte qu'en ſuppoſant même cette différence d'une petiteſſe énorme, il n'eſt pas poſſible qu'elle convienne à ces grandeurs : car l'on pourra toujours démontrer qu'elles approchent l'une de l'autre plus près que de la quantité ou de la différence aſſignée. Or, quand on ne peut pas aſſigner de différence entre deux grandeurs, & que l'on apperçoit d'ailleurs que la différence que l'on aſſigneroit peut diminuer ſans fin, non-ſeulement juſqu'à échapper aux ſens, mais même à l'imagination, il faut néceſſairement convenir que ces grandeurs ſont égales; puiſque des grandeurs inégales auroient une différence abſolument déterminée.

Quoique cette vérité ſoit très-lumineuſe, & que la démonſtration en ſoit ſimple, & ſuffiſamment

convaincante, nous n'avons pas cru devoir nous en tenir à cette unique expoſition. Si les vérités mathématiques ne ſont pas toujours éclairées de la vive lumière des premiers axiomes, au moins on ne leur a jamais conteſté l'avantage de porter dans l'ame une conviction parfaite : c'eſt pourquoi, afin de parvenir à ce but par différens côtés, nous allons faire part à nos Lecteurs de deux nouvelles Propoſitions, qui ſuffiroient toutes ſeules à établir la méthode d'Exhauſtion d'une manière inconteſtable.

## PROPOSITION PREMIERE.

433. Si deux grandeurs A, B ſont *la limite* (*a*) d'une même quantité C, ces deux grandeurs ſeront égales entr'elles.

## DÉMONSTRATION.

Deux grandeurs ſont égales entr'elles, quand on ne peut pas leur ſuppoſer de différence, ſans tomber en contradiction : or il n'eſt pas poſſible, ſans tomber en contradiction, de ſuppoſer une différence entre les grandeurs A, B, qui ſont la limite de la même quantité C. Car, ſi l'on veut qu'il y ait une différence entre ces grandeurs, ſuppoſons que A ſurpaſſe B de la quantité D ; donc A $=$ B $+$ D : mais (ſupp.) B eſt la limite de C, c'eſt-à-dire que C peut approcher de B plus près que d'une grandeur donnée, ſans néanmoins pouvoir la ſurpaſſer ; par conſéquent C ſera toujours éloigné de la quantité B $+$ D au moins de la grandeur D.

(*a*) *Limite.* On dit qu'une grandeur eſt la limite d'une autre grandeur, quand la ſeconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, ſi petite que l'on la puiſſe ſuppoſer. Enſorte que la différence d'une quantité à ſa limite eſt abſolument inaſſignable.

Or $B + D = A$; donc C ſera toujours éloigné de la grandeur A au moins de la quantité D, ce qui eſt contre la première ſuppoſition; puiſque A étant la limite de C, il eſt néceſſaire que la grandeur C approche de A plus près que d'une quantité quelconque. On ne ſauroit donc ſuppoſer une différence entre deux grandeurs qui ſont la limite d'une même quantité, ſans tomber en contradiction; ainſi ces deux grandeurs ſont néceſſairement égales; C. Q. F. D.

## PROPOSITION II.

434. Soit $A \times B$ le produit des deux grandeurs A, B. Suppoſons que C ſoit la limite de la grandeur A, & D la limite de la quantité B. Je dis que $C \times D$, produit des limites, ſera néceſſairement la limite de $A \times B$, produit des deux grandeurs A, B.

## DÉMONSTRATION.

Car, puiſque A peut approcher de C auſſi près qu'on veut, &, que B peut auſſi approcher de D auſſi près qu'on veut; donc le produit $A \times B$ des deux grandeurs A, B approchera de $C \times D$, produit de leurs limites, auſſi près qu'on voudra. Or, quand un produit approche d'un autre produit auſſi près qu'on veut, le ſecond produit eſt la limite du premier. Par conſéquent le produit $C \times D$ des limites, eſt la limite du produit $A \times B$ des deux grandeurs A, B.

## *COROLLAIRE.*

435. On prouvera de même que, ſi l'on a tant

de grandeurs que l'on voudra A, B, F, G, &c. dont les limites ſoient C, D, E, H, &c. le produit C D E H de toutes les limites ſera néceſſairement la limite du produit A × B × F × G de toutes les grandeurs propoſées.

## *REMARQUE.*

436. Ces deux Propoſitions renferment tout l'eſprit de *la méthode d'Exhauſtion*. Appliquons-les à la meſure du cercle. Quand il a été queſtion de cette meſure (n°. 102), nous avons tâché de faire comprendre qu'il falloit multiplier la demi-circonférence par le rayon, afin d'avoir l'aire du cercle; & pour cela nous avons réſolu le cercle en un très-grand nombre de triangles, qui avoient tous leur ſommet au centre du cercle, & pour baſe une portion de circonférence ſi petite qu'elle ne différoit pas ſenſiblement d'une ligne droite, ce qui réduiſoit le cercle à un polygone rectiligne; mais cette conſidération n'étoit pas rigoureuſe. Voyons ſi la méthode d'Exhauſtion réduira à rien toutes les raiſons de douter.

Conſidérons la figure 51. Pl. 5. où l'on a inſcrit un Polygone, dont on peut multiplier le nombre des côtés tant que l'on voudra; afin que ſon aire approche de plus en plus de la ſurface du cercle où il eſt inſcrit, ſans qu'il puiſſe jamais ſurpaſſer cette ſurface; ce qui fait que la ſurface du cercle eſt la limite de celle du Polygone inſcrit quelconque. On appelle *Apothême* une perpendiculaire O B abbaiſſée du centre ſur un des côtés S S du Polygone inſcrit. Il eſt évident que l'aire de ce Polygone inſcrit eſt le produit du demi-périmètre par l'Apothême. Or la circonférence eſt la limite du périmètre, ou, ce qui revient au même, la demi-

circonférence eſt la limite du demi-périmètre, & le rayon eſt la limite de l'Apothême; par conſéquent (Prop. II. n°. 434.) le produit de la demi-circonférence par le rayon, c'eſt-à-dire, le produit des limites, eſt la limite du produit du demi-périmètre par l'Apothême : mais l'aire du cercle eſt auſſi la limite de ce même produit; donc (Prop. I. n°. 433.) l'aire du cercle eſt égale au produit de la demi-circonférence par le rayon; puiſque deux grandeurs ſont néceſſairement égales quand elles ſont chacune la limite d'une même quantité.

## *COROLLAIRE.*

437. Par conſéquent, ſi l'on pouvoit déterminer géométriquement la longueur de la circonférence du cercle, c'eſt-à-dire, ſi l'on pouvoit *la rectifier* (*a*), on auroit, à la rigueur, la quadrature du cercle.

(*a*). *Rectifier* une courbe, c'eſt trouver une ligne droite qui lui ſoit égale.

# DE LA TRIGONOMÉTRIE
## *Rectiligne par les Sinus.*

438. ON a cherché avec un très grand ſoin les propriétés du triangle, il n'y a preſque point de figures qui ne puiſſent s'y réduire. Ainſi l'on peut dire que tout eſt connu dans une figure, ſi biſarre qu'elle puiſſe être, lorſqu'on eſt parvenu à déterminer les angles & les côtés des triangles, dans leſquels elle peut être réſolue.

Quoique nous ayons donné pluſieurs méthodes de connoître les côtés & les angles d'un triangle quelconque; cependant, comme notre principal deſſein étoit alors d'ouvrir l'eſprit des Commençans, ces méthodes leur ont été propoſées ſeulement à cauſe de la grande facilité qu'il y avoit de les concevoir : car elles ſont ſujettes à de ſi grands inconvéniens dans la pratique, que l'on ne ſçauroit guères compter ſur la préciſion d'une exécution dont elles ſeroient le fondement.

Il n'y a rien qui paroiſſe plus ſimple que la diviſion d'une échelle; & peut-être, quelque précaution que l'on y prenne, n'y a-t-il rien de plus rare que d'en avoir d'exactes. Quelquefois une ligne de l'échelle eſt priſe pour une lieue ſur le terrein; il eſt très-poſſible que l'on ſe trompe d'un centième ſur une ligne : cette erreur n'eſt pas diſcernable aux ſens ſur une auſſi petite étendue; mais la centième partie d'une lieue, repréſentée par la longueur d'une ligne, eſt quelque choſe de très-conſidérable : c'eſt plus de vingt-une toiſes.

D'un autre côté à combien d'erreurs ne s'expoſe-t-on pas, en rapportant des angles ſur le papier?

Qu'on les faſſe tant ſoit peu plus petits ou plus grands ; que les lignes qui terminent ces angles ſoient plus ou moins larges : voilà des ſources très-fréquentes d'inexactitude.

On s'en apperçoit bientôt, quand on paſſe de la théorie à la pratique. Auſſi les Géomètres d'une antiquité très reculée ſe ſont-ils attachés à la recherche des moyens qui pouvoient diminuer le nombre de ces erreurs.

Comme un triangle n'eſt compoſé que de trois angles & de trois côtés, ils ſoupçonnèrent d'abord qu'il pouvoit y avoir quelque rapport entre ſes angles & ſes côtés ; parce que dans un Triangle un plus grand angle eſt néceſſairement oppoſé à un plus grand côté.

En cas que ce rapport fût conſtant, il en naiſſoit un très-grand avantage : ce que l'on auroit calculé pour un triangle l'auroit été pour une infinité d'autres, qui pouvoient lui être ſemblables ; ils réduiſirent donc cette queſtion à *déterminer le rapport qu'il y avoit entre les angles & les côtés d'un Triangle.*

Quoique l'on ne puiſſe pas comparer un angle à une ligne, c'eſt à dire, que l'on ne puiſſe pas ſe ſervir immédiatement d'une ligne, pour meſurer un angle ; cependant le rapport d'une ligne à une ligne peut être comparé au rapport d'un angle à un angle : car, s'il y a des lignes doubles, triples, &c. d'autres lignes, il y a auſſi des angles qui ſont doubles, triples d'autres angles.

439. En conſéquence de cette idée on examina, *ſi les côtés d'un Triangle ne ſeroient pas entr'eux comme les angles oppoſés à ces côtés.*

On ſuppoſa donc le triangle iſoſcèle A B C rectangle (*fig.* 145.) dont le côté A B = le côté A C, & l'angle A eſt double de l'angle B, ou de

l'angle C = B. (n°. 79.) Si les angles d'un triangle étoient entr'eux comme les côtés opposés à ces angles, puisque l'angle A est double de l'angle B, le côté BC, opposé à l'angle A, devroit être double du côté AC opposé à l'angle B; mais il est évident que le côté BC n'est pas double du côté AC : car le côté AB égalant AC, l'on auroit BC = AC + AB, c'est à-dire, que la ligne droite BC seroit égale à la ligne anguleuse BAC, qui a les mêmes extrémités B, C; ce qui est impossible.

*Les angles d'un triangle ne sont donc pas entr'eux comme les côtés opposés à ces angles.*

440. Après avoir reconnu qu'il n'y avoit point de proportion constante entre les angles & les côtés d'un triangle, il fut naturel de penser que peut-être il y en avoit une entre les angles & les cordes de ces angles, c'est à-dire, que *les angles d'un triangle pouvoient être entr'eux comme les cordes de ces angles.*

On circonscrivit donc un cercle à un triangle isoscele ABC (*fig.* 145.), que nous supposerons encore rectangle en A; & remarquant que la corde d'un angle étoit la même chose que la corde de l'arc qui mesure cet angle, comme l'angle à la circonférence est mesuré par la moitié de l'arc qui passe entre ses côtés (n°. 104.), on s'apperçut que DC étoit la corde de l'angle BAC, après avoir tiré AD qui passe par le centre. Or il est visible que DC = AC : ainsi AC est la corde de l'arc qui mesure l'angle A.

De même l'angle B à la circonférence a pour mesure la moitié AO de l'arc AOC, qui passe entre ses côtés : ainsi la corde de l'angle B est la ligne AO; par conséquent, si les angles d'un triangle étoient entr'eux comme leurs cordes corres-

pondantes, on auroit cette proportion : l'angle A eſt à l'angle B, comme A C corde de l'angle A, eſt à A O corde de l'angle B : mais (ſupp.) l'angle A eſt double de l'angle B ; donc la corde A C de l'angle A ſeroit double de la corde A O de l'angle B : cependant il eſt bien évident que A C n'eſt pas double de A O ; ſi cela étoit, à cauſe de A O = O C, la ligne droite A C vaudroit la ligne anguleuſe A O C ; cela n'eſt pas poſſible.

*Les angles d'un triangle ne ſont donc pas entr'eux comme les cordes correſpondantes.*

Que les angles d'un triangle ne ſoient pas entr'eux comme leurs cordes correſpondantes, cela eſt aſſez facile à préſumer ; parce que les angles ne ſont pas meſurés par leurs cordes ; mais par des arcs qui ſont des lignes courbes. Il ſeroit pourtant poſſible à la rigueur que des lignes courbes euſſent entr'elles le même rapport que des lignes droites, comme deux circonférences de cercle ont entr'elles le rapport de leurs diamètres ; cependant, comme on peut faire des triangles avec toutes ſortes d'angles, & que l'on ne connoît point le rapport de deux arcs de cercle quelconques indéterminés, il paroîtroit difficile que les arcs, qui ſont la meſure de ces angles, euſſent toujours un rapport exprimable par celui de leurs côtés.

441. Mais ne pourroit-on pas comparer les côtés non aux angles, mais aux cordes de ces angles, qui ſont des lignes droites ? Cela paroît plus vraiſemblable. Examinons donc, *ſi les côtés d'un triangle ne ſeroient pas entr'eux comme les cordes des angles oppoſés à ces côtés.*

Suppoſons le triangle A B C rectangle en B, (*fig.* 146.) dont un des côtés A B ſoit égal au rayon du cercle, qui lui eſt circonſcrit ; ce côté eſt donc la moitié du diamètre A C, hypothénuſe de

ce triangle ; & de plus il eſt la corde d'un angle ou d'un arc de 60 degrés ( par la Dém. du n°. 119.). Du centre O abbaiſſons la perpendiculaire OMT, qui coupe la corde AB & l'arc ATB en deux parties égales ( n°. 122. ). Tirons la corde BT : elle eſt ſous-tendante d'un arc de 30 degrés ; & par conſéquent c'eſt la corde de l'angle BCA, lequel ayant ſon ſommet à la circonférence, a pour meſure l'arc TB, moitié de l'arc ATB qui paſſe entre ſes côtés ( n°. 104. ). Par la même raiſon DC, corde du quart de cercle, eſt la corde de l'angle droit ABC.

Si l'on veut donc que les côtés d'un triangle ſoient entr'eux comme les cordes des angles oppoſés à ces côtés, on aura cette proportion : le côté AC eſt au côté AB, comme la corde DC de l'angle ABC eſt à la corde BT de l'angle BCA : or AC eſt double de AB ; donc la corde DC devroit être double de la corde BT.

Appellons $r$ le rayon $OB = AB = OC = OD = OT$ : à cauſe du triangle COD iſoſcèle rectangle, $\overline{DC}^2 = rr + rr = 2rr$ ( n°. 293. ) ; ainſi la corde $DC = \sqrt{2rr}$.

Cherchons préſentement l'expreſſion de la corde BT : conſidérons le triangle rectangle BMO ; nous aurons $\overline{OB}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{BM}^2$ ; donc $\overline{OB}^2 - \overline{BM}^2 = \overline{OM}^2$ : mais $OB = r$ & $BM = \frac{r}{2}$ ; ainſi $rr - \frac{rr}{4} = \overline{OM}^2 = \frac{3rr}{4}$ (en donnant la même dénomination aux deux termes $rr - \frac{rr}{4}$) ; par conſéquent $OM = \sqrt{\frac{3rr}{4}}$ ; donc $MT = OT - OM$ devient $= r - \sqrt{\frac{3rr}{4}}$.

Conſidérons

Considérons encore le triangle rectangle BMT; nous aurons $\overline{BT}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{MT}^2 = \frac{rr}{4} + rr - 2r\sqrt{\frac{3rr}{4}} + \frac{3rr}{4}$; (en mettant les valeurs des lignes (BM, MT) ce qui se réduit à $\overline{BT}^2 = 2rr - 2r\sqrt{\frac{3rr}{4}}$; & par conséquent $BT = \sqrt{2rr - 2r\sqrt{\frac{3rr}{4}}}$. Nous avons déja trouvé que la corde $DC = \sqrt{2rr}$; par conséquent, si DC étoit double de BT, on auroit $\frac{\sqrt{2rr}}{2} = \sqrt{2rr - 2r\sqrt{\frac{3rr}{4}}}$; donc, en quarrant l'un & l'autre membre, $\frac{2rr}{4}$ ou $\frac{rr}{2} = 2rr - 2r\sqrt{\frac{3rr}{4}}$. Donc $\frac{rr}{2} - 2rr = -2r\sqrt{\frac{3rr}{4}}$. Mais $\frac{rr}{2} - 2rr = \frac{rr}{2} - \frac{4rr}{2} = -\frac{3rr}{2}$; (en donnant la même dénomination) par conséquent $-\frac{3rr}{2} = -2r\sqrt{\frac{3rr}{4}}$; donc, en quarrant l'un & l'autre membre, on aura $\frac{9r^4}{4} = 3r^4$; (& multipliant l'un & l'autre membre par 4) l'équation devient $9r^4 = 12r^4$. Enfin, divisant par $r^4$, on a l'équation $9 = 12$. Ce qui est absurde.

M. le P. Féty, Minime, ancien Professeur de Mathématiques à l'Ecole de Dessein & de Mathématiques de la Ville de Reims, très-célèbre & très digne de l'être par ses belles & utiles connoissances dans la science des Hydrauliques, ayant eu

la bonté de me faire connoître combien cette Démonſtration coûtoit aux Commençans, je m'appliquai ſur le champ à la recherche d'une autre que je vais expoſer. (*fig.* 146.)

## II. DÉMONSTRATION.

Après avoir tranſporté BT de C en S, & abbaiſſé OLR perpendiculairement ſur DC, pour avoir CL moitié de CD, & l'angle DCS ou LCS de 30$^{d.}$ parce qu'il a pour meſure la moitié de l'arc DS = 60$^{d.}$ (conſt.) car l'arc DS = CD — CS = 90 — 30 (conſt.) = 60$^{d.}$ menons OS, qui donne l'angle ROS de 15$^{d.}$ étant meſuré par l'arc RS = CR — CS = 45 — 30 (conſt.) = 15$^{d.}$ & traçons LS.

Maintenant, ſi la corde DC étoit double de BT, elle le ſeroit de CS = BT (conſt.) : ainſi CL, moitié de DC, égaleroit CS; donc le triangle CLS ſeroit iſoſcéle, & l'on auroit l'angle CLS = CSL; ainſi l'angle LCS étant de 30$^{d.}$ comme on l'a vû, les deux angles CLS, CSL auroient chacun 75$^{d.}$ (n°. 67. Géom. T. 1.); donc l'angle CLR étant droit (conſt.), l'angle SLR n'auroit que 15$^{d.}$; ainſi il ſeroit égal à l'angle ROS, que l'on a vû être auſſi de 15$^{d.}$; donc l'angle SLR, extérieur au triangle OLS, ſeroit égal à l'un des angles intérieurs oppoſés ROS de ce triangle, ce qui eſt impoſſible; (Cor. du n°. 65. Géom. T. 1.) donc, &c.

Ayant fait part de cette nouvelle Démonſtration à M. le P. Féry, il m'en communiqua une de ſon invention, qui mérite bien d'avoir ici ſa place. La voici telle que j'ai pû me la rappeller : car il y avoit bien un an qu'il m'en avoit tracé la figure, qui fut effacée ſur le champ.

## III. DÉMONSTRATION DE M. LE P. FÉRY.

Il élève perpendiculairement le rayon O D, & il mène la corde A D de l'angle droit (*fig. L. PL.* 18.); alors, ſi A D étoit double de la corde B T, cette corde B T égaleroit la moitié de A D. Or cela eſt impoſſible : car l'arc A T B D étant de 90$^{d.}$, l'arc A T B de 60, & l'arc B T de 30$^{d.}$ (conſt.), les arcs A T, B D ſont néceſſairement chacun de 30$^{d.}$, & par conſéquent la corde B T eſt parallèle à A D; puiſqu'alors les angles T B A, B A D, alternes internes, ſont égaux, ayant chacun pour meſure la moitié d'arcs égaux A T, B D : mais O T étant (conſt.) perpendiculaire ſur A B, ainſi que l'eſt B C, il s'enſuit que O T eſt parallèle à B C; & comme les parallèles entre parallèles ſont égales, on voit que la corde B T = R S. Donc, ſi B T égaloit la moitié de A D, la ligne R S ſeroit auſſi la moitié de A D, ce qui eſt abſurde, n'étant que la moitié de A S partie de A D, puiſqu'à cauſe des triangles ſemblables, A B S, A M R, A M. M B :: A R. R S : or, (conſt.) A M = M B, donc A R = R S; donc R S, moitié de A S, ne peut pas l'être de A D; C. Q F. D.

On ne peut donc pas ſuppoſer, que *les côtés d'un triangle ſoient entr'eux comme les cordes des angles oppoſés à ces côtés, ſans tomber en contradiction.*

442. Enfin on a remarqué, que *les côtés d'un triangle étoient entr'eux comme les cordes du double des angles oppoſés à ces côtés.*

Car, en circonſcrivant un cercle au Triangle A D B (*fig.* 147.), il eſt évident que chaque côté eſt la corde d'un angle double de celui auquel

ce côté eſt oppoſé ; puiſque l'angle D, par exemple, qui a ſon ſommet à la circonférence, n'eſt que la moitié de l'angle, qui auroit pour meſure l'arc A O B, dont le côté A B eſt la corde.

443. Une obſervation auſſi ſimple ne paroît pas d'abord devoir procurer de grandes commodités ; cependant les premiers Géomètres réfléchiſſant ſur ce qui pouvoit en réſulter, trouvèrent qu'en déterminant en nombre la valeur de toutes les cordes des angles, on pourroit connoître avec une extrême facilité les côtés & les angles d'un triangle, dont un côté & deux angles ſeroient donnés, ou deux côtés & un angle, ou enfin les trois côtés.

Pour le faire comprendre par un ſeul exemple, avant d'entrer dans un détail que nous donnerons bientôt ; ſuppoſons que l'on connoiſſe les deux angles A, B, & le côté A B du triangle A D B (*fig.* 147.) ; je dis qu'avec une ſimple règle de trois, il ſera facile de découvrir la valeur des deux autres côtés A D, D B, & l'angle D ; car, 1°. les deux angles A, B d'un triangle étant connus, le troiſième D l'eſt néceſſairement ; vous n'avez maintenant qu'à faire cette proportion : *la corde du double de l'angle D, eſt à la corde du double de l'angle B, comme le côté B A oppoſé à l'angle D, eſt au côté D A oppoſé à l'angle B* : or, en ſuppoſant que l'on ait déterminé en nombres les cordes de tous les angles comme on l'a exécuté effectivement, les trois premiers termes de cette proportion ſont connus ; donc le quatrième terme eſt auſſi trouvé.

Par le même moyen on déterminera le côté D B.

444. On voit donc avec quelle facilité on parviendroit à connoître tous les angles & tous les côtés d'un triangle, ſi l'on avoit en nombres une table de toutes les cordes des angles ; & c'eſt à quoi les

Géomètres de ces derniers siècles se sont appliqués avec beaucoup de soin : mais au lieu de calculer, comme les Anciens, la valeur des cordes de tous les angles, ils ont trouvé plus de commodité à calculer la valeur de la moitié des cordes ; ce qui revient au même que de calculer les cordes, parce que *les cordes sont entr'elles comme leurs moitiés.*

445. Considérons le triangle inscrit A B C (*fig.* 148.). Nous venons de voir que *les côtés d'un triangle étoient entr'eux comme les moitiés des cordes du double des angles opposés à ces côtés.* Du centre O sur le côté A C abbaissons la perpendiculaire O S D, & tirons le rayon O C. 1°. La corde A C est coupée par la moitié au point S. 2°. L'arc A D C est aussi coupé en deux au point D (n°. 222.) ; ainsi l'angle C O D est égal à l'angle B situé à la circonférence (n°. 104) : mais l'on a appellé *le Sinus d'un angle*, par exemple de l'angle C O D, une perpendiculaire C S abbaissée de l'extrémité C de l'arc C D qui mesure cet angle, sur le rayon O D, qui passe par l'autre extrémité D du même arc ; par conséquent l'angle C O D étant égal à l'angle B, la perpendiculaire C S est aussi le Sinus de l'angle B : or C S n'est que la moitié de C A, corde du double de l'angle B ; *le Sinus d'un angle n'est donc que la moitié de la corde du double de cet angle.*

446. Mais il a été démontré que les côtés d'un triangle étoient entr'eux comme la moitié des cordes du double des angles opposés à ces côtés ; puis donc que les moitiés des cordes du double de ces angles sont la même chose que les Sinus de ces angles, il s'ensuit que *les côtés d'un triangle sont entr'eux comme les Sinus des angles opposés à ces côtés.*

447. La découverte de cette vérité occasionna le calcul des Tables des Sinus. Il fut aisé d'apperce-

voir que les ſinus des angles aigus croiſſoient à meſure que ces angles devenoient plus grands, & qu'ainſi l'on pouvoit déterminer le rapport de ces ſinus. Le ſinus B S (*fig.* 149.) de l'angle B O A, eſt plus petit que le Sinus C T de l'angle C O A; & ſi l'angle C O A devenoit l'angle droit D O A, ſon ſinus ſeroit le rayon D O, qui eſt le plus grand de tous les ſinus; & c'eſt pour cela qu'on l'a appellé *ſinus total.*

448. Comme les angles obtus, tel que l'angle B O M, ſont plus grands que l'angle droit D O A, on ne conçoit pas d'abord que le ſinus de l'angle droit ſoit le plus grand de tous les ſinus; mais on remarque bientôt que le ſinus B S de l'angle aigu B O A, n'eſt pas différent du ſinus de l'angle obtus B O M, qui eſt *ſon complément à deux droits* (*a*); puiſque la perpendiculaire B S étant la moitié de la corde du double de l'angle obtus B O M, comme on le voit en prolongeant B S juſqu'en G, il faut qu'elle ſoit le Sinus de cet angle obtus (n°. 445.).

449. Deux angles différens peuvent donc avoir le même ſinus; c'eſt pourquoi dans la réſolution des triangles on eſt obligé d'établir un caractère, qui faſſe diſcerner auquel des deux angles appartient un ſinus trouvé.

450. Puis donc que le ſinus de l'angle droit eſt le plus grand de tous les ſinus, il ſuffit de déterminer en nombre les ſinus des angles depuis un degré juſqu'à 90, afin d'avoir le rapport de ces Sinus.

Pour y parvenir, on a ſuppoſé que le ſinus total, ou le ſinus de l'angle droit (qui n'eſt pas différent du rayon du cercle avec lequel on meſure un angle quelconque); on a ſuppoſé, dis je, que le ſinus total fût diviſé en dix millions de parties éga-

(*a*) *Complément à deux droits*; c'eſt ce qu'il faut ajoûter à un angle, afin qu'il ſoit égal à deux angles droits.

les ; ce qui eſt très-poſſible, à cauſe que l'on peut prendre le rayon du cercle, qui ſert à meſurer les angles, auſſi long qu'il en eſt beſoin. (Nous dirons plus bas, pourquoi on le ſuppoſe diviſé en un ſi grand nombre de parties égales.) On a cherché enſuite à déterminer géométriquement combien le ſinus de chaque angle & de chaque minute d'angle contenoit de parties du ſinus total. Après avoir fait cette détermination, on a rangé en colonne la valeur numérique de tous les angles & de leurs minutes, rélativement au ſinus total ; & c'eſt ce qu'on appelle les *Tables des Sinus*. Quand on veut trouver par leur moyen la valeur des côtés ou des angles d'un triangle, on dit que l'on fait uſage de la *Trigonométrie par les Sinus*.

451. Afin que l'on prenne une idée de la manière dont les tables des ſinus ont été conſtruites, ſoit l'angle B O C de 30 degrés. (*fig.* 150.) Faites l'arc B A = B C : l'arc C B A eſt de 60 degrés ; la corde A C de cet arc eſt donc égale au rayon du cercle (n°. 119.), ou au ſinus total (n°. 447.) = dix millions ou 10000000. (ſupp.). Or le ſinus D C de l'angle B O C de 30 degrés, eſt la moitié de la corde du double de cet angle, c'eſt à-dire eſt la moitié de la corde A C (n°. 445.) ; par conſéquent le ſinus D C de l'angle de 30 degrés = cinq millions ou 5000000.

Sur le diamètre B S élevez le rayon perpendiculaire O M : il eſt évident que l'angle C O M = 60 degrés : du point C abbaiſſons la perpendiculaire C P ſur le rayon O M. Cette perpendiculaire C P eſt le ſinus de l'angle C O M de 60 degrés, (n°. 445.) qui eſt *le complément à un droit* (*a*) de l'angle B O C de 30 degrés.

(*a*) *Complément à un droit* ; c'eſt ce qu'il faut ajoûter à un angle, afin que ſa valeur ſoit égale à celle d'un angle droit.

Le ſinus d'un angle étant trouvé, il eſt facile de connoître la valeur de ſon complément à un droit. On n'a qu'à ſe rappeller la fameuſe propriété du triangle rectangle (n°. 293.), & conſidérer le triangle rectangle C O D, où l'on connoît l'hypothénuſe C O (ſinus total), & le côté D C, moitié de cette hypothénuſe ou du ſinus total, d'où l'on tire cette équation, $\overline{CO}^2 = \overline{DO}^2 + \overline{DC}^2$. Ainſi $\overline{CO}^2 - \overline{DC}^2 = \overline{DO}^2$; & par conſéquent $DO = \sqrt{\overline{CO}^2 - \overline{DC}^2}$; or D O = C P, ſinus du complément à un droit de l'angle B O C; donc $CP = \sqrt{\overline{CO}^2 - \overline{DC}^2}$, c'eſt-à-dire, que le ſinus C P de 60 degrés eſt égal à la racine quarrée de la différence qu'il y a entre le quarré du ſinus total & le quarré de la moitié de ce ſinus. En exprimant le ſinus C P numériquement, on le trouvera = 8660254 parties du ſinus total, qui en contient dix millions.

452. Par la connoiſſance du ſinus du complément d'un angle à un droit, on parvient facilement à celle du *ſinus verſe* d'un angle. On entend par *ſinus verſe* d'un angle, par exemple, de l'angle B O C, la partie B D du diamètre, compriſe entre le ſinus C D de cet angle & l'extrémité B de l'arc B C qui en eſt la meſure : c'eſt pourquoi, afin de mieux diſtinguer dans le diſcours le ſinus verſe B D du ſinus C D, on appelle ce dernier *ſinus droit*.

453. Nous avons fait remarquer (n°. 448.) que le ſinus droit C D de l'angle B O C étoit le même que le ſinus de l'angle obtus C O S, complément à deux droits de l'angle B O C; mais les ſinus verſes de ces deux angles ſont fort différens : car B D étant

le Sinus verſe de l'angle B O C, D S ſera le ſinus verſe de l'angle obtus C O S. (n°. 452.)

Quoique l'on n'ait pas beſoin des ſinus verſes dans la réſolution d'un triangle, nous n'avons pas voulu négliger de les faire connoître. La conſidération de ces lignes peut être utile dans d'autres parties des Mathématiques.

Ainſi, quand on voudra déterminer en nombres le ſinus verſe B D d'un angle B O C, après avoir connu la valeur de ſon ſinus droit D C, & du ſinus C P = O D de ſon complément à un droit, du ſinus total O B on retranchera le ſinus O D de ſon complément à un droit, & le reſte B D ſera la valeur du ſinus verſe de l'angle aigu B O C; ou, s'il s'agit de connoître le ſinus verſe de l'angle obtus C O S, complément à deux droits de l'angle B O C, on ajoûtera le ſinus total O B = O S, au ſinus O D = C P : cette ſomme ſera le ſinus verſe de l'angle obtus C O S.

On a vû que dans la détermination en nombre des ſinus il falloit extraire des racines quarrées. Ces racines ſont rarement exactes; il y a preſque toujours quelque reſte : c'eſt pourquoi on a ſuppoſé que le ſinus total fût diviſé en un très-grand nombre de parties, afin de les rendre d'une petiteſſe ſi énorme, que l'on pût négliger, ſans aucun inconvénient, ce qui manqueroit à la racine quarrée des nombres, qui déſignent la valeur des ſinus.

Après avoir déterminé en nombre les ſinus de tous les angles & de leurs minutes, par des voies approchantes de celles que nous venons de tenir par rapport à l'angle de 30 degrés, on a fait une table de tous ces ſinus, afin que l'on pût les trouver facilement au beſoin, ainſi que nous l'avons déja dit.

Quand nous en ferons à la réſolution des Problêmes, je ferai voir qu'avec la ſeule connoiſſance

des ſinus, on peut les réſoudre tous ſans aucune exception, & qu'ainſi la théorie de la Trigonométrie conſiſte en cette unique propoſition ſi ſimple, *les côtés des triangles ſont entr'eux comme les ſinus des angles oppoſés à ces côtés.*

454. Cependant, comme la pratique des Sciences & des Arts tire ſa perfection de la briéveté du tems que l'on emploie à une opération, les Géomètres ne furent point parfaitement contens d'une réſolution, qui ne leur paroiſſoit pas avoir toute l'élégance dont elle étoit ſuſceptible.

Ils s'attachèrent donc à la contemplation de certaines lignes, dont la détermination en nombres, toujours rélativement au ſinus total, leur apporta beaucoup de commodités, parce qu'elles diminuoient conſidérablement le tems des opérations; il eſt par conſéquent à propos que nous faſſions connoître ces lignes. (*fig.* 151.)

Reprenons l'angle COB de 30 degrés, dont nous avons déterminé en nombres le ſinus droit CD. A l'extrémité B de l'arc BC, qui meſure cet angle, tirons la tangente BG bornée par la ligne OG, qui paſſe par l'autre extrémité C de ce même arc. La ligne BG eſt *la tangente* de l'arc BC, ou de l'angle BOC, & la ligne OG en eſt *la ſécante.*

Pareillement MS eſt la tangente de l'arc CM, ou de l'angle COM, & la ligne OS eſt la ſécante de ce même angle.

Le ſinus droit CD de l'angle BOC, & le ſinus CP = OD de ſon complément à un droit étant connus, on détermine très-facilement en nombres la valeur de la tangente BG & de la ſécante OG de ce même angle; car, à cauſe des deux parallèles CD, BG, on a cette proportion : OD ou CP ſinus du complément à un droit, eſt à DC ſinus droit, comme OB ſinus total, eſt à BG tangente

de l'angle B O C : or les trois premiers termes de cette proportion ſont connus ; donc le quatrième terme, ou la tangente B G, eſt auſſi connu.

La ſécante O G de ce même angle ſe découvre avec la même facilité ; il n'y a qu'à faire cette proportion : le ſinus du complément à un droit O D ou C P, eſt au ſinus total O C, comme le même ſinus total O B = O C, eſt à la ſécante O G ; cette ſécante eſt donc une quatrième proportionnelle à trois termes connus, & par conſéquent elle eſt déterminée. On déterminera de même la tangente M S, & la ſécante O S de l'arc C M ou de l'angle C O M, complément à un droit de l'angle B O C. En ce cas, pour abréger le diſcours, quand on veut faire connoître que l'on parle du ſinus, de la tangente & de la ſécante du complément d'un angle à un droit, on fait uſage des mots *co-ſinus*, *co-tangente*, *co-ſécante* ; ainſi C P eſt le co-ſinus de l'angle B O C, la ligne M S en eſt la co-tangente, & O S la co-ſécante.

Quand on a eu déterminé en nombres la valeur de la tangente & de la ſécante de chaque angle, on a diſpoſé ces valeurs dans les tables des ſinus, vis-à-vis celle des ſinus correſpondants ; on y a même ajoûté les Logarithmes des ſinus & des tangentes, afin que l'on pût faire par l'addition & la ſouſtraction ce que l'on éxécute communément avec la multiplication & la diviſion. On n'y a pas mis les Logarithmes des ſécantes, parce que ces lignes ne rendant pas plus élégante la réſolution des Problêmes de la Trigonométrie, on s'en paſſe abſolument.

Les tables des ſinus, dont je vais faire uſage, ſont les tables d'Wlac, corrigées par M. Ozanam ; elles paſſent pour être fort exactes, & on les trouve par-tout. Voici la diſpoſition des différentes parties qui compoſent ces tables. On a marqué au

haut de chaque page les degrés d'un angle, & l'on voit au-dessous six colonnes verticales. La première colonne contient les minutes de l'angle marqué à cette page; on trouve à la seconde les sinus; les tangentes à la troisième; ce sont les sécantes à la quatrième; les Logarithmes des sinus à la cinquième; enfin on voit à la sixième les Logarithmes des tangentes.

Comme l'on a besoin assez souvent des co-sinus & des co-tangentes des angles, en ouvrant les tables des sinus, si l'on prend les degrés d'un angle à gauche, on trouve à la page de la droite les degrés de son complément à un droit, avec son co-sinus, sa co-tangente, sa co-sécante, &c. Par exemple, vous avez besoin du sinus d'un angle de 26 degrés 13 minutes; cherchez la page au haut de laquelle est écrit 26 degrés, & où la colonne des minutes commence par 0: descendez cette colonne depuis 1 minute jusqu'à 13 minutes. A côté de ce nombre, en allant horisontalement de gauche à droite, on trouve 44176. 68; c'est le sinus d'un angle de 26 degrés 13 minutes. Après cela vient le nombre 49242. 24, qui exprime la tangente de ce même angle. Ensuite le nombre 111466. 58 marque la valeur de la sécante. (le point qui sépare les deux chiffres les plus à la droite, signifie que l'on peut négliger ces chiffres sans un grand inconvénient.) Allez toujours de gauche à droite sur la même ligne horisontale, vous voyez que le Logarithme du sinus de cet angle est 9. 6451931, & celui de sa tangente est 9. 6923378. Le premier nombre 9 à la gauche marque un nombre entier, & tous les autres chiffres, qui en sont séparés par un point, forment le numérateur d'une fraction, dont le dénominateur est 1 suivi d'autant de zéros que son numérateur a de chiffres; ainsi le nombre 9.

6923378 eſt la même choſe que 9 + la fraction $\frac{6923378}{10000000}$ (n°. 79. *Algéb.*). Tout de ſuite à la page droite, au haut de laquelle eſt écrit 63 degrés, dans la première colonne verticale qui marque les minutes, on trouve 47 minutes; parceque 63 degrés 47 minutes ſont le complément à un droit de 26 degrés 13 minutes : car en ajoutant 63 degrés 47 minutes à 26 degrés 13 minutes, on a 90 degrés, valeur de l'angle droit. Dans cette page de la droite, les ſinus, les tangentes, &c. ont la même diſpoſition qu'à la page de la gauche; & par conſéquent on les trouvera, ainſi que nous l'avons expliqué.

455. Quand il s'agira de trouver l'angle d'un ſinus donné, on cherchera dans les tables le nombre qui exprime ce ſinus; ce nombre trouvé fera connoître l'angle qui lui répond. On veut ſçavoir, par exemple, à quel angle appartient le ſinus 55653.73 : en feuilletant les tables, on trouve que ce nombre eſt le ſinus d'un angle de 33 degrés 49 minutes.

Ceux qui ſeront curieux de voir plus particulièrement l'artifice de ces tables, pourront conſulter le P. de Chales, Ozanam, M. Wolf. Ces Auteurs ayant donné des *Cours de Mathématiques*, ont traité au long de la conſtruction & de l'uſage des tables des ſinus; pour nous qui avons un tout autre deſſein, il nous a ſuffi d'en donner une idée.

456. Cette idée eſt totalement renfermée dans ce petit nombre de mots : *Les tables des ſinus ne ſont rien autre choſe qu'un triangle rectangle, dont on a déterminé le rapport des trois côtés, en ſuppoſant un de ces côtés diviſé en dix millions de parties égales.* Car (*fig.* 150.) lorſque nous avons déterminé le ſinus de l'angle B O C de 30 degrés, on a pu remarquer que le ſinus total ou le rayon O C, eſt l'hypothé-

nuſe du triangle rectangle C D O ; que le ſinus droit C D de cet angle eſt un des côtés du même triangle ; & qu'enfin l'autre côté O D = C P eſt ſon co-ſinus ou le ſinus de ſon complément à un droit.

Il a donc fallu ſeulement calculer autant de triangles rectangles qu'il y a eu de ſinus droits à déterminer ; parceque le même triangle, qui ſert à faire trouver le ſinus droit d'un angle, fait auſſi connoître le co-ſinus de cet angle, c'eſt-à-dire, le ſinus du complément de cet angle à un droit.

457. Ainſi, quelque longueur que l'on ſuppoſe aux côtés d'un angle connu, on eſt toujours ſûr, par le moyen des tables, d'avoir en nombres le rapport du ſinus droit de cet angle à ſon ſinus total ; puiſqu'il eſt très-aiſé de démontrer, que les ſinus des angles du même nombre de degrés ſont entr'eux, comme le ſinus total de l'un eſt au ſinus total de l'autre. Regardez la figure 152. L'arc B O C eſt, à la vérité, plus grand que l'arc *b o c* ; mais, comme le grand arc B O C eſt la même partie de ſa circonférence entière que le petit arc *b o c* l'eſt de la ſienne, on aura cette proportion : *le ſinus total* A C *eſt au ſinus droit* B D, *comme le ſinus total* A *c eſt au ſinus droit b d.*

Pour en être convaincu, tirons les cordes B C, *b c*. Il eſt évident que les triangles A B C, A *b c* ſont équiangles ou ſemblables : ainſi A C . A *c* :: B C . *b c* ; mais les triangles rectangles B D C, *b d c* ſont auſſi ſemblables ; donc B C . *b c* :: B D . *b d* ; par conſéquent ces deux proportions produiſent cette ſuite de rapports égaux, A C . A *c* :: B D . *b d* ; ou, en alternant, A C . B D :: A *c* . *b d* ; C. Q. F. D.

458. Nous avons préſentement toute la théorie, qui ſert de fondement à la réſolution des Problême de la Trigonométrie. La ſeule vérité que l'on

doit avoir toujours préſente à l'eſprit, eſt que *les ſinus des angles ſont entr'eux comme les côtés oppoſés à ces angles*; d'où il eſt facile de juger, que l'on ne parvient à l'analyſe ou à la réſolution d'un triangle qu'à l'aide des proportions.

Or pour déterminer tous les termes d'une proportion, il faut abſolument qu'il y en ait trois qui ſoient connus; c'eſt pourquoi, quand on cherche à connoître les côtés & les angles d'un triangle, (ce qui s'appelle *en faire l'analyſe ou en donner la réſolution*) s'il n'y a pas trois choſes au moins connues dans ce triangle, la réſolution en eſt impoſſible. Quelquefois même trois ne ſuffiſent pas. Il eſt bien vrai que les trois côtés d'un triangle en déterminent les angles, comme nous le démontrerons; mais la connoiſſance des trois angles ne ſuffit pas à la détermination des trois côtés. Qui eſt ce qui ne voit pas qu'il y a une infinité de triangles ſemblables dont les angles ſont égaux, chacun à chacun, & les côtés fort différens? Nous ferons même remarquer que l'on peut connoître deux côtés & un angle d'un triangle, ſans qu'il ſoit poſſible d'en déterminer le reſte.

---

## RÉSOLUTION de tous les Problêmes de la Trigonométrie par cette Propoſition unique: *Dans un triangle, les Sinus des angles ſont entr'eux comme les côtés oppoſés à ces angles.*

459. COmme nous allons faire un perpétuel uſage du triangle rectangle, on doit ſe rappeller 1°. Que deux côtés connus dans ce triangle en déterminent néceſſairement le troiſième. 2°. Que le ſinus de l'angle droit eſt le ſinus total.

Ceci supposé. Puisque la Trigonométrie a été principalement inventée, afin de connoître les distances inaccessibles, nous nous attacherons d'abord à déterminer les trois côtés d'un triangle; parceque cette connoissance nous conduira à celle des trois angles. Et pour nous exprimer avec plus de simplicité, nous désignerons le sinus d'un angle par la lettre S, mise à la tête des lettres qui marquent cet angle : ainsi S A B D veut dire le sinus de l'angle A B D. De même S T signifie le sinus total.

## PROBLÊME I.

460. Trouver la distance A C des deux objets inaccessibles A, C. (*fig.* 153.)

## RÉSOLUTION.

Cherchons un lieu commode où nous puissions mesurer une base B D, à laquelle nous rapporterons nos opérations. Aux extrémités B, D de cette base plaçons successivement le Graphomètre, afin de prendre la valeur des angles A B D, C B D, B D C, B D A; ce qui fera connoître l'angle A D C, qui est la différence de l'angle B D C à l'angle B D A. Après cela considérons le triangle B A D, dans lequel nous connoissons l'angle A B D, & l'angle B D A, d'où l'on déduit la valeur du troisième angle B A D. On suppose de plus que l'on ait toisé la base B D.

Nous n'avons maintenant qu'à faire cette proportion : le sinus de l'angle B A D connu par les tables, est au sinus de l'angle A B D aussi connu par les tables, comme la base B D, opposée à l'angle B A D, est au côté A D opposé à l'angle A B D; ou plus simplement, S B A D. S A B D :: B D. A D. Or dans cette proportion les trois premiers termes sont connus : car les deux premiers le sont

le font par les tables des ſinus, & le troiſième eſt la baſe B D, que l'on ſuppoſe meſurée; ainſi le quatrième terme A D eſt connu. (n°. 247.).

Voyons préſentement ce que nous connoiſſons dans le triangle B D C. On a pris la valeur des angles C B D, B D C; ce qui détermine l'angle B C D. Enfin la baſe B D eſt connue; par conſéquent nous aurons cette proportion, S B C D. S C B D : : B D . C D, dans laquelle les trois premiers termes ſont encore connus; & par conſéquent le quatrième terme C D eſt déterminé.

Ceci nous fait déja voir qu'*un côté d'un triangle étant connu, avec les deux angles formés ſur ce côté, l'on peut facilement déterminer les deux autres côtés.*

Dans le triangle A D C nous connoiſſons donc la longueur des côtés A D, C D, & l'angle A D C compris entre ces côtés. Voilà donc le Problême propoſé réduit à cet autre Problême.

## PROBLÊME II.

461. Les deux côtés A D, C D du triangle A D C étant donnés, avec l'angle A D C intercepté entre ces côtés, trouver le troiſième côté A C. (*fig.* 154.)

## RÉSOLUTION.

1°. Si l'angle A D C eſt un angle droit, on aura (n°. 293.) $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{CD}$. Donc $AC = \sqrt{\overline{AD} + \overline{CD}}$; c'eſt-à-dire, que pour connoître la diſtance A C, on extraira la racine quarrée de la ſomme des deux quarrés connus $\overline{AD} + \overline{CD}$.

2°. Si l'angle A D C (*fig.* 155.) n'eſt pas droit, mais que les côtés A D, C D connus ſoient égaux,

alors le triangle ADC est isoscèle ; donc l'angle A = l'angle C ; par conséquent, puisque l'on suppose l'angle D connu, la somme des deux angles A, C sera aussi connue : ainsi la moitié de cette somme donnera la valeur de l'angle A & de l'angle C. Faites donc cette proportion : SDAC. SADC :: CD. AC, où les trois premiers termes sont connus ; le quatrième AC sera donc déterminé.

3°. Quand les côtés AD, CD connus sont inégaux (*fig.* 156.), & que l'angle ADC intercepté est aigu, de l'extrémité C du plus petit côté CD imaginez la perpendiculaire CM sur le plus grand côté AD, & considérez le triangle rectangle CMD, dans lequel le côté CD, l'angle CDM & l'angle CMD sont connus : d'où l'on déduit la valeur de l'angle MCD ; ce qui donne la proportion suivante : ST. SMCD :: CD. MD, dans laquelle les trois premiers termes sont donnés, & par conséquent le quatrième terme MD est connu. Mais (par la supposition) tout le côté AD est connu ; ainsi la partie AM = AD — MD sera aussi déterminée. Et, si l'on fait encore cette autre proportion : ST. SCDM :: CD. CM, où les trois premiers termes sont donnés, on connoîtra la perpendiculaire CM.

Dans le triangle rectangle AMC on connoît donc les deux côtés AM, MC, qui forment l'angle droit. Ainsi, puisque $\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2$, l'on aura $AC = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{MC}^2}$ ; c'est-à-dire, que la distance AC est égale à la racine quarrée de la somme des deux quarrés connus $\overline{AM}^2 + \overline{MC}^2$ ; & par conséquent cette distance est connue.

4°. Quand les côtés AD, CD connus sont inégaux, (*fig.* 157.) & que l'angle ADC inter-

cepté eſt obtus, de l'angle C imaginez la perpendiculaire C M ſur le côté A D prolongé. Dans le triangle C M D rectangle on connoît le côté C D (ſupp.); l'angle C D M eſt auſſi connu, parce que l'angle A D C eſt donné; de plus l'angle C M D eſt droit (conſt.); donc le troiſième D C M eſt déterminé. Nous aurons donc cette proportion : S T. S D C M : : C D . D M, dans laquelle les trois premiers termes connus feront connoître le quatrième terme D M. Ajoûtez cette valeur au côté A D connu (ſupp.), & toute la diſtance A M ſera entièrement connue.

En conſidérant encore le triangle rectangle C M D, on déterminera la longueur de la perpendiculaire C M par cette proportion : S T . S C D M : : D C . C M, dans laquelle les trois premiers termes connus donnent la valeur du quatrième C M.

Dans le triangle rectangle A M C on connoît donc les deux côtés A M, C M qui forment l'angle droit : ainſi il eſt facile de connoître l'hypothénuſe A C, en faiſant l'équation $\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{CM}^2$, d'où l'on tire $AC = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{CM}^2}$; ce qui veut dire, que la diſtance A C eſt égale à la racine quarrée de la ſomme des quarrés $\overline{AM}^2 + \overline{CM}^2$ connus; cette diſtance eſt donc auſſi déterminée.

Ainſi, généralement parlant, *on peut connoître, par le moyen des ſinus, le troiſième côté d'un triangle dont deux côtés ſont connus, avec l'angle intercepté entre ces deux côtés.*

Prenez garde qu'il eſt néceſſaire, pour la réſolution de ce Problême, que l'angle A D C connu ſoit intercepté entre les deux côtés donnés A D, C D. Si cet angle connu, au lieu d'être intercepté,

étoit opposé à l'un des deux côtés donnés, il faudroit avoir recours à quelqu'autre considération, ainsi qu'on va le démontrer dans le Problême suivant.

## PROBLÊME III.

461. Les deux côtés inégaux AD, CD d'un triangle étant donnés, avec l'angle DAC opposé à l'un de ces deux côtés, trouver le troisième côté AC. (*fig.* 158.)

## RÉSOLUTION.

Elle est impossible, en s'en tenant simplement aux termes de la question.

## DÉMONSTRATION.

Si nous faisons cette proportion, CD. AD :: SDAC est au sinus de l'angle opposé au côté AD, dans laquelle les trois premiers termes sont donnés, il est certain que l'on connoîtra le quatrième terme, c'est à-dire, le sinus de l'angle opposé au côté AD; mais ce sinus peut convenir à deux angles : car nous avons fait remarquer (n°. 448.) que le sinus d'un angle aigu étoit aussi le sinus du complément de cet angle à deux droits; par conséquent les tables des sinus ne font point connoître la valeur de l'angle DCA opposé au côté AD. Cet angle n'étant pas déterminé, il n'est pas possible de connoître l'angle ADC, dont le sinus nous conduiroit à la connoissance du troisième côté AC; C. Q. F. D.

463. C'est ce qui nous montre que *deux triangles peuvent avoir deux côtés égaux, chacun à chacun, avec un angle égal opposé au même côté, & être néanmoins fort différents.*

## DÉMONSTRATION.

Prenons le triangle ADC (*fig.* 158.), dont

le côté D C eſt plus petit que le côté D A. Du point D avec le rayon D C décrivons l'arc C O *c* qui coupe le côté A C au point *c*, & tirons D *c*. Il eſt évident que le triangle A D C a deux côtés égaux à deux côtés du triangle A D *c*; puiſque A D eſt un côté commun à ces deux triangles, que le côté D C = le côté D *c* (par la conſt.), & que de plus l'angle A, commun à l'un & à l'autre triangle, eſt oppoſé à des côtés égaux. Or, il eſt viſible que le triangle A D C eſt fort différent du triangle A D *c*; par conſéquent deux triangles peuvent avoir deux côtés égaux, chacun à chacun, & un angle égal oppoſé à un côté égal de part & d'autre, ſans avoir le troiſième côté égal au troiſième côté; C. Q. F. D.

464. Cependant, ſi l'on ajoûte aux données du Problême 3. (n°. 462.) l'eſpèce de l'angle D C A oppoſé au côté A D, alors ce Problême ſera totalement déterminé, quoique l'on ne ſache pas la valeur de cet angle.

## DÉMONSTRATION.

Suppoſons que quelques circonſtances faſſent connoître que l'angle D C A eſt aigu (*fig.* 158.), en reprenant la proportion : C D . A D :: S D A C . S D C A, où les trois premiers termes ſont connus, on aura la valeur du ſinus S D C A que l'on trouvera dans les tables, & par conſéquent on trouvera ſans équivoque la valeur de l'angle D C A qui répond à ce ſinus, à cauſe que l'on ſuppoſe cet angle aigu; & ſi on le ſuppoſoit obtus, l'angle qui répondroit au ſinus trouvé, ſeroit l'angle obtus D *c* A, complément à deux droits de l'angle aigu D C A.

Par conſéquent, ſelon que l'angle D C A ſera aigu ou obtus, le troiſième côté A C cherché ſera plus grand ou plus petit : car l'angle D C A étant

aigu, l'angle ADC en ſera plus grand ; d'où il réſulte un plus grand côté AC ; & ſi l'angle DcA eſt obtus, l'angle ADc en ſera plus petit, ce qui entraîne un plus petit côté Ac (n°. 82.) ; C. Q. F. D.

Juſqu'à préſent nous n'avons eu en vûe que de parvenir à la connoiſſance des trois côtés d'un triangle, dans lequel un côté & deux angles, ou deux côtés & un angle étoient donnés : il reſte encore à faire voir comment l'on peut déterminer les trois angles d'un triangle, dont on connoît la longueur des trois côtés.

## PROBLÊME IV.

465. Les trois côtés du triangle ADC étant connus, en déterminer la valeur de chaque angle. (*fig.* 159.)

## RÉSOLUTION.

1°. Si le triangle propoſé eſt équilatéral (*fig.* 159.), les trois angles en ſont égaux, & par conſéquent chacun vaut le tiers de 180 degrés = 60 degrés.

2°. Quand ce triangle eſt iſoſcèle (*fig.* 160.), c'eſt-à dire, quand on ſuppoſe que les deux côtés DA. DC ſont égaux, il faut imaginer la perpendiculaire DF abbaiſſée de l'angle D ſur le troiſième côté AC. On voit bien que cette perpendiculaire tombe ſur le milieu du côté AC donné ; par conſéquent AF ou FC moitié de AC, eſt auſſi connue ; ainſi le triangle rectangle DFC donnera cette proportion : DC. FC :: ST. SFDC, dans laquelle les trois premiers termes connus feront connoître le quatrième terme, qui eſt le ſinus de l'angle aigu FDC ; cet angle ſera donc

connu par les tables, & par conſéquent, on aura la valeur du troiſième angle C : or l'angle C = l'angle A, parceque le triangle A D C eſt ſuppoſé iſoſcèle ; ainſi l'on pourra connoître le troiſième angle A D C.

3°. Si le triangle A D C eſt ſcalène (*fig.* 161.), c'eſt-à-dire, ſi les trois côtés de ce triangle ſont inégaux, on imaginera encore une perpendiculaire C F, abbaiſſée du plus grand angle A C D ſur le plus grand côté A D ; cette perpendiculaire diviſera le côté A D en deux ſegmens inégaux A F, F D, qu'il faut tâcher de déterminer : car leur détermination fera connoître chacun des angles du triangle propoſé.

Quoique nous ayons déja donné la ſolution de ce Problème (n°. 297.), nous allons pourtant la répéter ; parce que nous en tirerons quelques conſéquences, qui nous feront découvrir une abbréviation fort utile dans la pratique. (*fig.* 161.)

Soit donc $AD = a$, $CD = b$, $AC = c$, $AF = x$, $DF = a - x$, $CF = y$ ; & conſidérons le triangle rectangle C F A : nous aurons $\overline{AC}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{CF}^2$, ou $cc = xx + yy$.

Par la même raiſon, le triangle rectangle C F D nous donne $\overline{CD}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{CF}^2$, ou $bb = aa - 2ax + xx + yy$ : ſubſtituons dans cette dernière équation $cc$ en la place de $xx + yy$ ; on aura l'équation ſuivante $bb = aa + cc - 2ax$ ; & en tranſpoſant, l'on trouve $2ax = aa + cc - bb$ ; d'où l'on déduit $x = \frac{aa+cc-bb}{2a}$ ; ce qui ſignifie que le plus petit ſegment A F ſe détermine, en retranchant le quarré du côté C D de la ſomme des quarrés des côtés A D, A C, & diviſant le reſte par le double du

plus grand côté A D Quand le petit ſegment A F eſt connu, on n'a qu'à le retrancher du grand côté A D ; cette ſouſtraction fera connoître le grand ſegment F D.

Après cela, conſidérant le triangle rectangle A F C, on aura cette proportion : A C . A F :: S T . S A C F, qui fera connoître l'angle A C F, & par conſéquent l'angle C A D.

De même, le triangle rectangle C F D donne cette proportion : C D . F D :: S T . S F C D ; d'où l'on tire la connoiſſance de l'angle F C D, & par conſéquent celle de l'angle C D A.

Dans le triangle A C D on connoît donc à préſent l'angle C A D & l'angle C D A ; ainſi le troiſième angle A C D eſt connu. La détermination des trois côtés d'un triangle en fait donc connoître les angles ; par conſéquent, nous ſommes parvenus à ce que nous nous étions propoſé de trouver ; C. Q. F. D.

Quand on veut connoître les angles d'un triangle ſcalène, dont les trois côtés ſont donnés, on voit que toute la difficulté conſiſte à déterminer l'un des deux ſegmens A F, F D (*fig.* 161.) ; & que pour trouver le plus petit de ces deux ſegmens A F, il faut quarrer le grand côté A D, quarrer auſſi le plus petit côté A C, faire une ſomme de ces deux quarrés, retrancher de cette ſomme le quarré du côté moyen C D, & enfin diviſer ce reſte par le double du plus grand côté A D : car le quotient de cette diviſion donne la valeur du plus petit ſegment A F, ainſi que le montre l'équation $x = \frac{aa+cc-bb}{2a}$. Mais tout cela eſt d'un aſſez grand détail. Si l'on pouvoit parvenir à la connoiſſance de l'un de ces deux ſegmens par une voie plus courte, la pratique de la Trigonométrie

en feroit plus parfaite. Eſſayons donc de trouver quelque moyen qui exige moins de calcul que la manière précédente.

466. Il eſt évident que les deux ſegmens A F, F D étant connus, leur différence eſt auſſi connue. Or nous avons trouvé par le calcul précédent que le petit ſegment $AF = \frac{aa+cc-bb}{2a}$. Ainſi le grand ſegment $FD = AD - AF = a - \frac{aa-cc+bb}{2a} = \frac{2aa-aa-cc+bb}{2a}$ (en réduiſant à la même dénomination); d'où l'on tire, en ôtant ce qui ſe détruit, le grand ſegment $FD = \frac{aa-cc+bb}{2a}$. Par conſéquent la différence de ces ſegmens, ou $FD - AF = \frac{aa-cc+bb}{2a} - \frac{aa-cc+bb}{2a} = \frac{2bb-2cc}{2a} = \frac{bb-cc}{a}$; c'eſt-à-dire, que l'expreſſion de la différence des deux ſegmens F D, A F eſt $\frac{bb-cc}{a}$. Appellons $d$ cette différence; on aura donc $\frac{bb-cc}{a} = d$: or $\frac{bb-cc}{a} = \frac{\overline{b+c} \times \overline{b-c}}{a}$; ainſi $d = \frac{\overline{b+c} \times \overline{b-c}}{a}$; donc $a \times d = \overline{b+c} \times \overline{b-c}$, ce qui donne cette proportion : $a . b+c :: b-c . d$; c'eſt-à-dire, que l'on trouve la différence des deux ſegmens par cette ſimple proportion : *le plus grand côté A D ($a$) eſt à la ſomme des deux autres côtés C D, A C ($b+c$), comme la différence C D — A C ($b-c$) de ces deux mêmes côtés eſt à un quatrième terme $d$, qui eſt la différence cherchée.*

Mais, ſelon les conditions du Problême, la ſomme A D des deux ſegmens eſt donnée, & par cette dernière proportion on trouve leur différence; par conſéquent on aura facilement la valeur de chaque ſegment; puiſque (n°. 103. *Algèb.*) le plus

grand eſt égal à la moitié de la ſomme des ſegmens, plus la moitié de leur différence, & le plus petit eſt égal à la moitié de la ſomme des mêmes ſegmens, moins la moitié de leur différence.

Ainſi, au lieu de chercher la valeur de l'un des deux ſegmens, comme nous avons fait d'abord, il ſera beaucoup plus expéditif de déterminer la différence de ces ſegmens, en faiſant uſage de la proportion $a . b + c :: b - c . d$, que nous venons de trouver par le calcul.

467. Ceux qui ſeront curieux de voir comment la Géométrie s'accorde ici avec le calcul, n'ont qu'à faire attention à la conſtruction ſuivante.

Du point C avec le plus petit côté CA (*fig.* 162.) décrivez un cercle, & prolongez DC juſqu'à ſa rencontre H avec la circonférence. Il eſt clair, 1°. que DH eſt la ſomme des deux côtés DC, AC, puiſque AC = CH. 2°. Que DM eſt la différence de ces deux mêmes côtés DC, AC: car, à cauſe de MC = AC, DC — AC = DC — MC = DM. 3°. DT eſt la différence des ſegmens DF, AF: on doit ſe rappeller qu'une perpendiculaire, abbaiſſée du centre d'un cercle ſur l'une de ſes cordes AT, coupe cette corde en deux parties égales; ainſi AF = FT; par conſéquent DT eſt la différence du grand ſegment DF au petit ſegment AF.

Il faut donc démontrer que le plus grand côté DA eſt à la ſomme DH des deux autres côtés DC, AC, comme DM, différence de ces deux mêmes côtés, eſt à DT, différence des ſegmens DF, AF, faits par la perpendiculaire CF, abbaiſſée du plus grand angle ſur le plus grand côté AD.

Or cela eſt démontré par la ſeule conſtruction: car (n°. 287. Prop. XXIII.) ſi d'un point D, pris hors d'un cercle, on tire deux ſécantes DA,

DH, ces lignes entières ſeront entr'elles réciproquement comme leurs parties DT, DM, qui ſont hors le cercle; par conſéquent DA . DH :: DM. DT; c'eſt-à-dire, que le plus grand côté DA eſt à la ſomme DH (DC + AC) des deux autres côtés, comme leur différence DM eſt à la différence DT des deux ſegments DF, AF. La Géométrie eſt donc d'accord avec le calcul, ou peut-être eſt-ce le calcul qui a fait trouver la conſtruction géométrique.

Nous ſommes enfin parvenus à découvrir tous les angles & tous les côtés d'un triangle, dont trois parties ſont données, en y joignant quelque caractère particulier, quand certaines circonſtances l'exigent; pourvû néanmoins que ce ne ſoient pas ſimplement les trois angles: car il n'eſt pas poſſible avec cette ſimple connoiſſance de déterminer les trois côtés d'un triangle, quoique les trois côtés connus déterminent les angles; il ne nous reſte donc plus qu'à faire voir les avantages que l'on a retirés de la contemplation des tangentes.

## *Utilité des tangentes dans la Réſolution des Problêmes de la Trigonométrie par les ſinus.*

468. QUoique les tangentes ne ſoient pas abſolument néceſſaires à la réſolution de ces Problêmes, elles ſont pourtant fort utiles. Moins il y a d'opérations à faire, moins auſſi les erreurs ſe multiplient, &, ce que l'on conſidère beaucoup dans les arts, plus on gagne de temps: or la conſidération des tangentes réduit quelquefois à deux ſimples proportions la réſolution d'un Problême, que l'on ne pourroit réſoudre que par ſix proportions, ſi l'on vouloit ſe borner à l'uſage des ſinus; & c'eſt

une propoſition unique, qui va nous procurer cet avantage. Mais par compenſation, elle paroît très-difficile aux Commençans; beaucoup de perſonnes même très-verſées dans la Géométrie, n'apperçoivent pas les routes qui ont pû conduire les Inventeurs à cette découverte. Nous allons tâcher de faire voir les degrés par où l'on a paſſé; mais auparavant il faut que nous expoſions quelques Préliminaires.

469. C'eſt le triangle rectangle, qui a été notre moyen de réſolution dans les Problêmes précédents; il le ſera encore à l'égard de celui qui va ſuivre. Conſidérez donc qu'un triangle rectangle A B C étant donné, ſi l'on prend pour rayon ou pour ſinus total un des deux côtés A B, B C, qui comprennent l'angle droit A, l'autre côté ſera néceſſairement la tangente de l'angle qui lui eſt oppoſé. (*fig.* 163.)

## DÉMONSTRATION.

Du point C, avec le rayon B C, décrivez l'arc B O; puiſque l'on ſuppoſe A B perpendiculaire à l'extrémité du rayon C B, le côté A B eſt une tangente au cercle, dont l'arc B O eſt une partie (n°. 105.); par conſéquent ce même côté étant déterminé par la ſécante C A, qui paſſe par l'autre extrémité O de l'arc B O qui meſure l'angle B C A, il eſt clair (n°. 454.) que le côté A B eſt la tangente de l'angle oppoſé B C A.

On voit auſſi que, ſi du point A avec le rayon A B on décrivoit un arc B D, le côté B C feroit la tangente de l'angle B A C, qui lui eſt oppoſé: ainſi *l'un des deux côtés d'un triangle rectangle étant pris pour le ſinus total, l'autre côté eſt néceſſairement la tangente de l'angle qui lui eſt oppoſé.*

470. Cette obſervation fournit un moyen très-

ſimple de connoître tous les angles & l'hypothénuſe d'un triangle rectangle, dont on connoît ſeulement les deux côtés qui comprennent l'angle droit. Suppoſons que les deux côtés AB, BC du triangle rectangle ABC ſoient donnés. Pour connoître les deux angles A, C, il n'y a qu'à faire cette proportion, *AB eſt à BC, comme le ſinus total eſt à la tangente de l'angle BAC*, dans laquelle les deux premiers termes AB, BC ſont donnés, par la ſuppoſition ; & le troiſième eſt connu par les Tables ; on connoîtra donc le quatrième terme, c'eſt-à dire, la tangente de l'angle BAC ; par conſéquent les Tables donneront la valeur de cet angle, & tout de ſuite la valeur de l'angle BCA ſon complément à un droit.

L'hypothénuſe AC eſt préſentement fort aiſée à déterminer, en diſant : *le Sinus de l'angle A eſt au Sinus total, comme le côté BC eſt à l'hypothénuſe AC:* dans cette proportion les trois premiers termes ſont connus ; le quatrième terme, c'eſt-à-dire, l'hypothénuſe AC, eſt donc néceſſairement déterminé.

On pouvoit déterminer autrement cette hypothénuſe AC, en tirant la racine quarrée de la ſomme des deux Quarrés faits ſur les deux côtés AB, BC ; mais le calcul ſeroit beaucoup plus long qu'en faiſant uſage de la proportion précédente, où le ſinus total, exprimé par une ſuite de zéros précédés de l'unité, abrége conſidérablement le calcul, ſoit que ce ſinus faſſe l'office de multiplicateur, ſoit qu'il faſſe celui de diviſeur.

Que l'on ſe rappelle à préſent le Problème 2, où il s'agit de trouver le troiſième côté d'un triangle, dont deux côtés inégaux ſont donnés avec l'angle intercepté entre ces côtés : ſi l'on propoſoit en même tems d'en trouver les deux autres angles, il eſt certain que l'on ne pourroit réſoudre entière-

ment ce Problême par le moyen des ſinus, à moins que l'on n'y employât cinq ou ſix proportions, au lieu que deux ſeules proportions feront tout connoître, en ſuivant le chemin que nous allons montrer.

471. Soit donc le triangle ABC (*fig.* 164.) dont on connoît les deux côtés inégaux AB, BC, avec l'angle ABC intercepté entre ces côtés; il s'agit d'en déduire la connoiſſance des deux autres angles BAC, BCA, & celle du troiſième côté AC.

Rendons-nous bien attentifs à cette queſtion. 1°. Nous connoiſſons les deux côtés AB, BC; leur ſomme eſt donc connue, & nous pouvons l'exprimer par la ſeule ligne CM, en faiſant le prolongement BM = AB. Que l'on tire maintenant la ligne MA; on aura le triangle iſoſcèle ABM.

2°. L'angle ABC eſt donné (ſupp.); donc l'angle ABM, ſon complément à deux droits, eſt connu: de plus cet angle ABM eſt extérieur au triangle ABC; il vaut donc la ſomme des deux angles inconnus BAC, BCA (n°. 65.), qui ſont formés ſur le troiſième côté AC inconnu, & cette ſomme eſt connue.

Donc, ſi du point B on abbaiſſe la perpendiculaire BD ſur le côté AM, cette perpendiculaire coupera en deux parties égales l'angle ABM, c'eſt-à-dire, qu'elle diviſera en deux parties égales la ſomme des deux angles BAC, BCA; ainſi l'angle DBM eſt la moitié de la ſomme de ces angles: leur ſomme étant connue, leur moitié DBM eſt auſſi connue.

Non ſeulement la perpendiculaire BD diviſe en deux parties égales la ſomme ABM des deux angles BAC, BCB: elle diviſe encore en deux parties égales la ligne MA (n°. 79.), enſorte que MD = DA; donc en coupant CM en deux parties égales au point O, & tirant la ligne DO,

cette ligne ſera néceſſairement parallèle au côté inconnu A C, puiſque l'on a cette proportion : M D. D A : : M O . O C. Ce qui fait voir que les deux côtés du triangle A M C ſont coupés proportionnellement, & par conſéquent (n°. 279.) que la ligne D O eſt parallèle à la ligne A C. On doit encore remarquer que M O eſt une ligne connue : car elle eſt la moitié de la ſomme C M des deux côtés connus A B, B C.

Mais ſi l'on ſe ſouvient que la plus grande de deux quantités eſt égale à la moitié de leur ſomme, plus leur demi-différence (n°. 103. *Alg.*), on verra, en ſuppoſant B C > B A, que B O eſt la demi-différence de ces deux côtés ; puiſque ajoutant B O à la moitié de la ſomme O C, on a le plus grand côté B C. Or (ſupp.) les deux côtés B C, B A ſont connus : ainſi leur différence eſt donnée : & par conſéqent l'on connoît B O, qui eſt la moitié de cette différence.

Conſidérons préſentement le triangle rectangle M B D. Prenons l'un de ces côtés B D pour ſinus total ; l'autre côté M D eſt la tangente de l'angle D B M oppoſé à ce côté (n°. 469.), comme il eſt très-évident, en décrivant du point B, avec le rayon B D, l'arc du cercle D T. Mais nous avons vû ci-deſſus que D B M étoit la moitié de la ſomme des angles B A C, B C A ; le côté M D eſt donc la tangente de la demi-ſomme des angles formés ſur le troiſième côté A C : cette demi-ſomme eſt donnée (par la ſupp.) ; ainſi la valeur de ſa tangente M D eſt connue par les tables des ſinus.

Remarquons auſſi que dans le triangle M O D nous connoiſſons, 1°. M O, moitié de la ſomme des deux côtés connus A B, B C. 2°. B O, moitié de la différence de ces mêmes côtés. 3°. M D, tangente de la demi-ſomme des angles B A C,

B C A, formés ſur le troiſième côté A C. Par conſéquent en mettant ces trois termes dans une proportion, nous leur trouverons un quatrième proportionnel X; ainſi il faut conſtruire cette proportion : M O . B O :: M D . X.

Or il eſt clair qu'en tirant B S parallèle à O D, la partie S D ſera le quatrième proportionnel cherché (n°. 280.); & ce terme ſera connu, puiſque l'on connoît les trois premiers.

Voyons ce que c'eſt que la ligne S D. B S étant, par la conſtruction, parallèle O D qui eſt elle-même parallèle au côté A C, il s'enſuit que B S eſt parallèle à la ligne A C, & qu'ainſi l'angle M B S = l'angle B C A, le plus petit des deux angles inconnus. Mais M B S = M B D — D B S, c'eſt-à-dire, que M B S, le plus petit des deux angles inconnus, eſt égal à la moitié M B D de la ſomme de ces angles, moins l'angle D B S; l'angle D B S eſt donc la demi-différence des angles B C A, B A C, puiſque la plus petite de deux quantités eſt égale à la moitié de leur ſomme, moins leur demi-différence (n°. 103. *Alg.*); par conſéquent la ligne S D, tangente de l'angle D B S, eſt auſſi la tangente de la demi-différence des deux angles inconnus B C A, B A C.

Reprenons la proportion M O . B O : : M D . S D trouvée ci-deſſus; ſi nous l'énonçons, on verra que *la moitié M O des deux côtés donnés A B, B C, eſt à B O, moitié de leur différence, comme M D, tangente de la demi-ſomme connue des deux angles inconnus, eſt à S D, tangente de la demi-différence de ces mêmes angles.* Or les deux premiers termes de cette proportion ſont donnés (ſupp.), le troiſième l'eſt par les tables; donc le quatrième eſt déterminé; c'eſt-à-dire, que cette proportion fait connoître la demi-différence des deux angles inconnus

connus BCA, BAC : il n'y a plus qu'à ajouter cette demi différence à la moitié de la ſomme de ces angles, pour avoir BAC le plus grand des deux angles ; ou retrancher cette même demi-différence de la moitié de la ſomme de ces mêmes angles ; on aura le plus petit angle BCA (*a*).

(*a*) Cette découverte eſt d'une ſpéculation beaucoup plus fine que celle du *quarré de l'hypothénuſe*, *&c.* pour laquelle on fit aux Muſes un ſacrifice de cent bœufs. Je voudrois connoître l'Auteur de cette belle propoſition, je lui en ferois honneur très volontiers.

Ceux qui étudient les arts, & qui ſuivent le progrès des ſciences, rencontrent aſſez ſouvent de très belles inventions, dont les Auteurs ſont abſolument inconnus. On ne ſait à qui attribuer les machines les plus utiles à la Société, la charrue & le moulin. Pourroit-on nommer l'Auteur du compas de proportion, inſtrument néanmoins qui eſt tout-à-fait ſcientifique ? On doit au haſard la découverte du Téleſcope & du Quinquina. En un mot, il ſemble que les génies les plus célebres n'aient produit que des curioſités, & que l'on ſoit uniquement redevable des commodités les plus eſſentielles à des hommes groſſiers, obſcurs, ſans lettres, ſans théorie.

Quand on conſidere ces effets, on eſt aſſez porté à croire que les hautes ſciences & les ſublimes ſpéculations ſont d'une très petite importance. Mais on doit faire réflexion que dès les premiers tems de la formation des Sociétés, on ſe mit à penſer aux machines de premiere néceſſité. Les beſoins naturels y ſollicitoient tous les hommes. Dans cet état on mit à profit tout ce que la nature peut préſenter de modeles. Il eſt fort ordinaire de voir un courant d'eau faire tourner les corps ſoumis à ſon action. Combien de tourbillons occaſionnés par l'impulſion du vent ? Il ne s'agit plus alors que de copier la nature : on diſpoſa donc quelques bâtons ſur un eſſieu ; on préſenta cet aſſemblage à l'action de l'eau ou du vent ; & voilà la premiere origine du moulin.

Ce mouvement autour d'un eſſieu ne parut d'abord ſans doute qu'un léger amuſement. La néceſſité eſt induſtrieuſe, elle porte naturellement l'eſprit à la réflexion. Une roue qui tourne en peut faire tourner une autre ; de nouvelles roues s'engrainent, & la machine ſatisfait déja aux beſoins les plus preſſans.

La premiere, qui parut en ce genre, dut être auſſi groſſiere que les beſoins qui la firent naître. Mais l'expérience en ayant fait connoître les commodités, des beſoins plus délicats ſe firent ſentir, le goût s'affina. Il ne ſuffit pas à la nature de ne point éprouver de mal, elle cherche à être bien ; quand elle y eſt parvenue, elle veut être mieux : ainſi les hommes, qui ſuccéderent aux premiers Inventeurs, moins occupés à ſe défendre contre les premiers beſoins, & délivrés en partie du travail de l'invention, en devinrent plus propres à améliorer ce qu'ils poſſédoient. On vit donc les machines ſe perfectionner à meſure que nos goûts ſe développoient ; & ſi l'Inventeur de la charrue & du moulin eſt inconnu, c'eſt que tant d'hommes ont concouru à les amener au degré de perfection où elles ſont, que l'on doit leur attribuer ce que l'on dit des Sciences, qu'elles ſont

Alors les trois angles du triangle ABC seront connus, auſſi bien que les deux côtés AB, BC; c'en eſt plus qu'il n'en faut pour déterminer le troiſieme côté AC: car ſi l'on fait (par Prob. 1. *Trig.*) cette proportion: SBAC. SABC :: BC. AC, où les trois premiers termes ſont donnés, il eſt clair que l'on connoîtra le quatrieme terme AC, & qu'ainſi il ne reſte plus rien à découvrir dans la queſtion propoſée; C. Q. F. T. & D.

Il nous ſeroit aiſé maintenant de réſoudre tous les Problêmes qui ont rapport aux diſtances acceſſibles

l'ouvrage des hommes, & non pas celui d'un homme. Si nous conſidérons encore combien tous les hommes ſont naturellement portés à eſſayer ce qui peut ſatisfaire à leurs premiers beſoins, il me ſemble que, pour trouver les premieres machines, il n'a fallu d'autre génie que le beſoin même: que pluſieurs hommes de contrées différentes ont dû les découvrir, ſans s'être rien communiqué; les mêmes beſoins ayant fait recourir aux mêmes reſſources.

Quant aux machines ſavantes, telles que le compas de proportion & la montre, c'étoit encore ſi peu de choſe dans leur origine, leurs effets étoient ſi bornés, que l'on fit peu d'attention à leurs premiers Inventeurs. On les oublia même totalement, quand par la ſuite des tems ces machines acquirent quelque préciſion, & s'étendirent à un ſi grand nombre d'uſages, qu'elles parurent abſolument différentes d'elles-mêmes. Mais Galilée, Deſcartes, Huygens, Newton ſont des Auteurs fort connus; parce que chacun de ces hommes extraordinaires a fait des découvertes que l'on ne devoit attendre, ce ſemble, que de pluſieurs ſiecles & de pluſieurs nations.

Le Téleſcope a été découvert par haſard; c'eſt qu'il eſt impoſſible que les premiers élémens d'un art ou d'une ſcience ſe découvrent autrement: il faut néceſſairement partir de quelque expérience. Ceux qui ſe conduiſent autrement, s'expoſent à de longs & inutiles travaux. Le ſujet même que je traite, nous en fournit un exemple très remarquable. L'effet des Téleſcopes vient, comme l'on ſçait, de ce que les rayons de lumiere paſſant de l'air dans le verre, & du verre dans l'air, ſe détournent de leur direction; c'eſt ce que l'on appelle *faire réfraction*. Ceux qui penſent que la Philoſophie doit abſolument remonter aux premieres cauſes, ont travaillé beaucoup à découvrir celle de la réfraction. Ils ne ſont pas plus avancés que quand ce Phénomene parut d'abord. Les Mathématiciens laiſſent diſputer les Philoſophes, & marchent toujours en avant. La théorie & l'art des Téleſcopes ſont preſque portés à leur perfection; mais on ſe demande encore comment la réfraction peut s'opérer. Ne ſeroit-il pas plus philoſophique d'avouer que les premiers reſſorts de la nature nous ſeront à jamais inconnus? Il me ſemble qu'un ouvrage, qui détermineroit avec ſoin les limites de l'eſprit humain, ſeroit un excellent Traité de Philoſophie.

& inacceſſibles, ſoit que ces diſtances ſoient horiſontales, verticales, inclinées à l'horiſon, ou qu'elles déſignent des profondeurs ; mais comme tous ces cas particuliers ſont renfermés dans les Problêmes dont nous avons donné la ſolution ci-deſſus, nous nous bornerons à quelques-uns, afin de ne pas groſſir inutilement nos Inſtitutions. Si le Public trouve que cet Ouvrage ſoit traité ſelon ſon goût, & qu'il ſouhaite d'avoir une énumération exacte de tous ces cas, nous ne manquerons pas de le ſatisfaire.

## PROBLÊME.

472. Trouver d'en-bas la hauteur de l'élévation AC perpendiculaire à l'horiſon, tels que ſont les arbres, les clochers, les pyramides, les édifices qui s'élevent, comme l'on ſait, perpendiculairement à l'horiſon. Nous ſuppoſerons d'abord que cette élévation ſoit acceſſible par ſon pied A (*fig.* 165.)

## RÉSOLUTION.

On s'éloignera du pied A juſqu'à une diſtance B, où l'angle CED ſoit entre 30 & 50 degrés, afin que cet angle ne ſoit pas trop aigu : ſuppoſons qu'il ait 36 degrés ; on meſurera la diſtance AB = 106 toiſes.

Rappellez-vous maintenant que dans un triangle rectangle, ſi l'on prend l'un des côtés ED pour ſinus total, l'autre côté CD eſt la tangente de l'angle E qui lui eſt oppoſé ; l'angle E eſt connu, ainſi ſa tangente eſt connue : cherchez donc dans les tables des Sinus la tangente de l'angle de 36 degrés = 7265426, afin d'avoir cette proportion : *le ſinus total* 10000000 *eſt à la tangente* 7265426 *de* 36 *degrés, comme la diſtance AB* = 106 *toiſes, eſt à l'élevation DC cherchée*, dans laquelle les trois premiers termes 10000000,

7265426, 106, étant donnés, on trouvera que le quatrieme terme, c'eſt-à-dire, l'élévation CD = 77 toiſes & quelques pouces. On ajoutera à cette élévation la hauteur du Graphometre BE = AD, qui eſt ordinairement de 4 pieds, & toute l'élévation AC vaudra 77 toiſes, 4 pieds, quelques pouces.

473. Quand cette élévation AB eſt totalement inacceſſible, ainſi que le repréſente la figure 166, prenez une ſtation commode au point G: placez-y verticalement le plan du Graphometre, afin de prendre la valeur de l'angle AOS = 50 degrés; ce qui donne l'angle AOD = 130 degrés. Eloignez-vous enſuite du point de ſtation O dans l'alignement de la ligne OS, & prenez une baſe OD = 40 toiſes, de ſorte que l'angle ADO ne ſoit pas trop aigu; qu'il ait, par exemple, 30 degrés: alors l'angle OAD eſt aiſé à connoître; on le trouvera de 20 degrés.

Cherchons préſentement la longueur du côté OA, en faiſant cette proportion: le ſinus de l'angle DAO de 20 degrés eſt au ſinus de l'angle ADO de 30 degrés, comme la baſe DO = 40 toiſes eſt au côté AO; ce côté ſera donc connu. Préſentement le triangle rectangle ASO donne cette proportion: le ſinus total eſt au ſinus de l'angle AOS de 50 degrés, comme le côté AO, que l'on vient de connoître, eſt à l'élévation AS. Ajoutez à cette élévation la hauteur de l'inſtrument OG = SB, & toute la hauteur AB ſera connue.

474. Voulez-vous faire uſage des Logarithmes? Reprenons le n°. 472. (*fig.* 165.) où l'on a propoſé de trouver la hauteur de l'élévation AC acceſſible par ſon pied A. On doit ſe rappeller que l'angle CED a été ſuppoſé de 56 degrés; & qu'ainſi le triangle rectangle CDE a fourni cette

proportion : le ſinus total 10000000 eſt à la tangente 7265426 de 36 degrés, comme la diſtance AB = 106 toiſes eſt à l'élévation CD, que l'on trouve, en achevant le calcul, égale à 77 toiſes & quelque choſe.

Mais pour faire uſage des Logarithmes, au lieu des nombres que nous venons d'écrire, prenons les Logarithmes qui leur répondent. Le Logarithme du ſinus total, ou de l'angle de 90 degrés, eſt 10.0000000. Celui de la tangente de 36 degrés eſt 9.8612610; ces deux Logarithmes ſe trouvent dans les tables des ſinus. Pour le Logarithme de la diſtance AB = 106 toiſes, on le trouvera dans la table des Logarithmes pour les nombres naturels, qui eſt à la ſuite des tables des ſinus : ce Logarithme eſt 2.0253059; & au lieu de multiplier l'un par l'autre les moyens de la proportion, 10000000 . 7265426 :: 106 . CD, & d'en diviſer le produit par le premier terme 10000000, on prendra la ſomme 11.8853059 des Logarithmes de ces mêmes moyens termes, dont on retranchera le Logarithme 10.0000000 du premier terme, & la différence 1.8856569 exprimera le Logarithme du quatrieme terme CD (n°. 266.); ſi l'on cherche ce nombre ou le plus approchant dans la table des Logarithmes pour les nombres naturels, on verra qu'il répond au nombre 77, ainſi qu'on l'a déterminé n°. 472.

Nous avons promis à la fin du n°. 338. pag. 231. (*fig.* 112. & 113. *PL. XIII.*) d'expoſer, dans toutes ſes circonſtances, la ſolution Trigonométrique du Problême, où l'on propoſe de trouver, par une ſeule ſtation C, les diſtances de cette ſtation à trois points A, D, B, dont les éloignemens AB, AD, DB, ſont connus. C'eſt

ici qu'il convient de remplir notre engagement.

La ſtation donnée peut être ſur un des côtés du triangle ADB, ou au-dedans, ou au-dehors de ce même triangle.

1°. Si l'on ſe trouve, par exemple, en M, (*fig.* 112) ſur l'un des côtés AB, on pourra prendre avec un inſtrument les angles DMA, DMB; & les côtés AB, AD, DB étant connus (ſupp), tous les angles du triangle ADB le ſeront auſſi; (n°. 465.) dans le triangle ADM, on connoîtra donc l'angle DAM, conclu des trois côtés donnés; de plus l'angle DMA obſervé, avec le côté AD donné; ce qui ſuffit (n°. 460.) pour trouver les diſtances cherchées MD & MA. Et, comme AB eſt donné, (ſupp.) ôtant MA de AB, on connoîtra auſſi MB; ainſi les trois diſtances MA, MD, MB ſeront toutes connues.

## *REMARQUE.*

On reconnoîtra que l'on eſt ſur l'un des côtés, ſi la ſomme des angles DMA, DMB eſt préciſément de 180d. ou, quand ayant obſervé la direction MA d'un côté, on ſe trouvera dirigé par l'autre côté ſur le point B, ſans changer l'Alidade.

2°. Lorſque le point donné ſe trouvera au dedans du triangle, comme en C, on obſervera les angles DCA, DCB, ACB, & l'on imaginera qu'une circonférence paſſe par les trois points A, C, B; que l'on ait prolongé DC juſqu'à la rencontre de cette circonférence en F, & qu'enfin l'on ait tiré les cordes FA, FB. Cette préparation étant faite, remarquez que l'angle DCA eſt donné par obſervation, & par conſéquent ſon ſupplément ACF; or ACF = ABF; parce que ces deux angles ſont à la circonférence du même

cercle, & appuyés sur le même arc AF. Vous remarquerez aisément, par la même raison, que le supplément BCF de l'angle observé DCB est égal à l'angle BAF. Ainsi, dans le triangle ABF, le côté AB, & les deux angles BAF, ABF, sont connus : on pourra donc connoître AF & FB (n°. 460.). Alors les deux côtés AD, AF, & l'angle intercepté DAF du triangle DFA étant connus, on en découvrira (n°. 471) l'angle ADF ; & dans le triangle ADC, on connoîtra l'angle DCA, par observation, l'angle ADF que l'on vient de trouver, & le côté AD donné ; d'où l'on conclura (n°. 460.) les deux distances cherchées CA, CD. Et pour avoir la troisieme CB, on aura recours au triangle DCB, dans lequel on connoît l'angle DCB observé, l'angle CDB, qui est la différence de l'angle ADB connu à l'angle ADC qu'on vient de découvrir, & enfin le côté DB donné ; ce qui fera trouver CB (n°. 460.).

3°. Si le point est donné au-dehors du triangle (*fig.* 112.), comme en F, on observera les angles AFD, DFB, & l'on imaginera une circonférence par les points A, B, F, ainsi que les cordes FA, FB, AC, CB. On considérera alors le triangle AGB, dans lequel l'angle ABC = AFC angle d'observation ; parce qu'ils ont leur sommet à la même circonférence, & qu'ils sont appuyés sur le même arc. Par la même raison, l'angle BAC = l'angle d'observation BFC : on a de plus (supp.) le côté AB connu ; d'où l'on conclura (n°. 460.) la longueur des cordes AC CB. Dans le triangle DAC on connoîtra donc les côtés AC, AD, & l'angle intercepté DAC ; puisque DAC = DAB connu (supp.), moins l'angle BAC, que l'on vient de découvrir. Ainsi

(n°. 471) on pourra découvrir l'angle ADC; prenant enſuite le triangle FAD, on remarquera que l'angle AFD d'obſervation en eſt connu : l'angle ADF vient d'être découvert, & le côté AD en eſt donné (ſupp.); donc (n°. 460.) on pourra connoître les deux diſtances FA, FD; & paſſant au triangle FDB, on y connoîtra l'angle d'obſervation DEB, l'angle FDB qui vaut l'angle connu ADB (ſupp.) moins l'angle ADF que l'on a déja trouvé; de plus, le côté DB eſt donné : on en conclura donc (n°. 460.) la diſtance FD; & c'eſt tout C. Q. F. D.

4°. Mais le point donné F peut ſe trouver ſur la circonférence du cercle, que l'on imagineroit paſſer par les trois points A, B, D (*fig.* K. Pl. 21.). Alors la ſolution du Problême eſt impoſſible.

## DÉMONSTRATION.

Car 1°. pour qu'elle fût poſſible, il faudroit que ce qui arrive au point F fût particulier à ce point : or les angles d'obſervation formés en F ſeroient les mêmes en tout autre point de l'arc AFB; ainſi la ſolution ne pourroit pas plus lui convenir qu'à tout autre.

2°. Pour réſoudre un Problême de cette eſpece, il eſt néceſſaire que la ſeule ſtation permiſe apporte quelque nouvelle donnée, ſoit de la part des angles qui s'y forment, ſoit de la part de leurs côtés. Or on ne peut avoir aucun côté, puiſque l'on n'accorde qu'une ſeule ſtation; & les angles d'obſervation AFD, DFB ne font rien connoître de nouveau, car ils ſont égaux à des angles donnés; étant évident que l'angle AFD = l'angle donné DBA, & que l'angle DFB = auſſi l'angle donné DAB. Le point F ne fait donc rien trouver de nouveau; mais avec rien on ne fait rien; C. Q. F. D.

## *REMARQUE.*

On reconnoîtra que la ſtation donnée F eſt ſur la circonférence qui paſſe par les trois points donnés A, D, B, quand les angles d'obſervation AFD, DFB ſe trouveront égaux aux angles DBA, DAB.

## DÉMONSTRATION.

Car ſi, dans cette ſuppoſition, le point donné F n'étoit pas à la circonférence qui paſſe par les points A, B, D, il ſeroit en quelque point S au dehors (*fig.* K. Pl. 21.) ou en quelque point G au-dedans de cette circonférence : or, en le ſuppoſant au dehors en S, il ſeroit impoſſible que l'angle d'obſervation ASD égalât l'angle donné ABD ; puiſque l'angle B donné a pour meſure la moitié de l'arc AD (n°. 104. *Tom. I.*) ; mais l'angle ASD n'a pas pour meſure la moitié de ce même arc ; car, en tirant la corde AF, on verra que l'angle ABD = AFD (n°. 104. *Tom. I.*) : or, AFD ▷ ASD (Coroll. du n°. 65. *Tom. I.*) ; donc ABD ▷ ASD ; l'angle d'obſervation ASD ne ſauroit donc être en même tems égal à l'angle ABD donné, & être au-dehors de la circonférence ADBF.

Pareillement il n'eſt pas poſſible que l'angle d'obſervation AGD, (*fig.* L. Pl. 21.) ſe trouve au-dedans de la circonférence en G, & qu'il ſoit en même tems égal à l'angle donné ABD ; ce que vous découvrirez aiſément, en prolongeant DG juſqu'à la circonférence en R, & en tirant la corde RA. Car l'angle AGD extérieur eſt plus grand que l'angle ARD : or ARD = ABD ; donc AGD ▷ ABD.

L'angle A F D d'obſervation ne ſauroit donc ſe trouver égal à l'angle donné A B D, à moins que cet angle A F D ne ſe trouve ſur la circonférence qui paſſe par les points A, D, B; & c'eſt tout C Q F. D.

Les tables des ſinus peuvent encore ſervir à trouver le rapport approché du diametre d'un cercle à ſa circonférence. Nous avons dit que ſuivant Archimede, ce rapport étoit à peu près comme 7 eſt à 22; c'eſt-à-dire qu'en ſuppoſant un diametre de 7 pieds, la circonférence en a preſque 22, un peu moins. Mérius prouve que ce rapport eſt plus approché, ſi on le prend comme 113 eſt à 355. Quelques-uns le prennent comme 100 eſt à 314. Voyons ce que le calcul des ſinus nous donnera.

## PROBLÊME.

475. Trouver le rapport approché du diametre d'un cercle à ſa circonférence. (*fig.* 167.)

## RÉSOLUTION.

Prenons le ſinus *b d* d'une minute de degré; en doublant ce ſinus, on aura *d a* corde d'un arc de deux minutes: car le ſinus d'un arc eſt toujours la moitié de la corde du double de cet arc (n°. 445.). Il y a 60 minutes au degré, & par conſéquent 30 fois 2 minutes; donc en multipliant par 30 la corde *d a*, on aura la valeur de 30 cordes égales à la corde *d a*, ou 30 *d a* inſcrites dans l'arc d'un degré: le cercle contient 360 degrés; par conſéquent il faut multipler 30 *d a* par 360, pour avoir toutes les cordes de deux minutes inſcrites au cercle. Or une corde de deux minutes dans les cercles d'une grandeur médiocre ſe confond preſque entiérement avec ſon arc; ainſi toutes les cordes de deux minutes inſcrites au cercle, priſes enſemble, ne ſont pas

ſenſiblement différentes de la circonférence du cercle : nous prendrons donc 30 $da \times 360$ ou 10800 $da$, c'eſt-à-dire, un polygone de dix mille huit cents côtés, inſcrit à un cercle, pour la circonférence de ce cercle.

Suppoſons maintenant le ſinus total ou le rayon de ce cercle = 100000 ; les tables donneront 29 pour le ſinus d'une minute, & par conſéquent $29 \times 2 = 58$ pour la corde de deux minutes $= da$ : ainſi $10800\ da = 10800 \times 58 = 626400$ pourra être pris pour ſa circonférence. D'ailleurs ſon rayon étant 100000, le diametre ſera 200000 ; par conſéquent le diametre de ce cercle eſt à ſa circonférence comme 200000 eſt à 626400 ; & en diviſant l'un & l'autre terme de ce rapport par 800, on trouve que le diametre eſt à la circonférence, comme 250 eſt à 783 : c'eſt donc à dire qu'en ſuppoſant le diametre d'un cercle égal à 250 pouces, la circonférence en contiendra à peu près 783.

Ainſi quand on voudra trouver par ce rapport le diametre d'un cercle, dont la circonférence = 10 pieds, on fera cette regle de trois : 783 . 250 :: 10 . $x$, diametre cherché ; on trouvera ce diametre égal à trois pieds $+ \frac{151}{783} = 3$ pieds 2 pouces, 3 lignes, $\frac{603}{783}$ de ligne.

Juſqu'à préſent nous n'avons déterminé que des objets acceſſibles ou inacceſſibles, terminés par des lignes droites. On peut avoir beſoin, & il eſt au moins fort curieux de pouvoir connoître les diſtances & les aires de ceux dont les dimenſions ſont circulaires. Un Magaſin, une Tour, un grand Baſſin inacceſſibles, offrent aſſez ſouvent ces figures ; & lorſqu'on en peut approcher, le centre en eſt ordinairement ſi caché ou ſi embarraſſé qu'on ne peut y appliquer aucune meſure. La réſolution

des Problêmes ſuivans va lever toutes ces difficultés.

## PROBLÊME.

Trouver la ſurface de la baſe d'une Tour circulaire inacceſſible.

## RÉSOLUTION.

D'un point B (*fig. T. PL. 6.*) d'où vous puiſſiez obſerver la Tour avec un Graphometre muni de bonnes lunettes, remarquez ſur cet objet un point M, dans la direction de la tangente BS; c'eſt-à-dire, faites qu'un rayon viſuel, en raſant ou en effleurant la Tour, aille rencontrer au-delà quelqu'autre objet remarquable : vous ſerez sûr que ce rayon viſuel eſt une vraie tangente. Retenez-en bien le point M de contingence. Appuyez enſuite cette tangente BM à une baſe BL que vous meſurerez, & prenez bien exactement en degrés les valeurs des angles LBM, BLM, formés ſur la baſe BL par les rayons viſuels BM, LM, dirigés au point M de contingence, afin d'en conclure l'angle BML. Si vous faites enſuite cette proportion, le ſinus de l'angle BML connu eſt au ſinus de l'angle BLM, auſſi connu, comme la baſe BL, dont on fait la meſure, eſt à la tangente BM; il eſt clair que la longueur de cette tangente vous ſera connue.

Imaginez préſentement le rayon MD & la ligne BD; cela formera avec la tangente BM, un triangle BMD rectangle en M, dans lequel il eſt aiſé de connoître en degrés la valeur de l'angle DBM.

Car, quoique l'on ne puiſſe ſe ſervir ici de la ligne BD, dont on ignore la direction, on peut

ſe donner, comme ci-deſſus, un autre rayon viſuel BG, tangent à la Tour au point R du cercle, qui en eſt une coupe, & par conſéquent connoître les degrés de l'angle MBR des deux tangentes: or, en imaginant le rayon DR, il eſt clair, à cauſe des deux tangentes égales BM, BR, que l'angle MBR eſt coupé en deux parties égales par la ligne BD; & cet angle étant connu par le moyen de l'inſtrument, ſa moitié MBD le ſera auſſi: de plus, l'angle BMD eſt droit par la nature de la tangente; ainſi dans le triangle rectangle BDM, on connoît deux angles & le côté BM; on connoîtra donc le rayon DM, en faiſant cette proportion: le ſinus total eſt à la tangente de l'angle DBM, comme BM eſt à DM, dans laquelle les trois premiers termes connus feront connoître le rayon DM, qui donnera le diametre d'où l'on aura la circonférence, & par conſéquent l'aire ou la ſurface de la baſe circulaire inacceſſible; C. Q. F. D.

Quand la circonférence d'un plan propoſé, ou ſimplement un de ſes arcs ſera acceſſible, ſans qu'on puiſſe ſe placer au centre, il faudra alors moins d'appareil & moins de ſcience géométrique pour en connoître les degrés, ainſi qu'on va le voir.

## PROBLÊME.

Trouver les degrés d'un arc acceſſible CRB, (*fig. K. PL. 3.*) au centre duquel il n'eſt pas poſſible de placer un inſtrument.

## RÉSOLUTION.

L'opération ne pourra ſe faire qu'au dehors de la figure, on en ſe plaçant entre la circonférence & le centre.

1°. Si l'on veut prendre par dehors les degrés de l'arc CRB, on le coupera d'abord par la moitié en R. Enſuite on cherchera un point, comme S, à égale diſtance de C & de B, pour avoir la ligne SR perpendiculaire à l'arc CRB; laquelle prolongée paſſeroit néceſſairement par le centre D de l'arc propoſé.

Pareillement, en appliquant une meſure pliante ſur l'arc CR, moitié de CB, on en prendra le milieu au point L, & l'on cherchera, comme ci-deſſus, un point M à égale diſtance de C & de R, pour avoir une ſeconde perpendiculaire ML ſur l'arc CB, laquelle prolongée paſſeroit auſſi par le centre D; & il eſt clair, par cette conſtruction, que l'angle LDR, ou MDS, ou, ce qui revient au même, que l'arc LR eſt le quart de l'arc propoſé CRB.

Or il n'y a rien de ſi aiſé que de connoître l'angle LDR; car, après avoir fait LM = RS, priſes ſur des directions que l'on vient de ſe donner, & planté des piquets aux points R, L, M, S, on placera un inſtrument au point M ou S, pour connoître les degrés de l'angle RSM, ou de ſon égal LMS. On le doublera, & cet arc ainſi doublé, ſouſtrait de 180 degrés, fera connoître l'angle LDR ou ſon arc LR, lequel quadruplé donnera en degrés la valeur de l'arc propoſé CRB. C. Q. F. T.

2°. Lorſque, dans la pratique, on ſe trouvera forcé d'opérer au-dedans de l'arc ou du cercle propoſé, ſans pouvoir ſe placer au centre, ainſi que le Problême le ſuppoſe, on coupera, comme ci-deſſus, l'arc propoſé BC, (*fig. X. PL. III.*) en deux parties égales au point R; & ſa moitié CR auſſi en deux parties égales au point L; après cela, on cherchera un point S également éloigné de B

& de C, & un autre point M, éloigné de C comme de R; ce qui donnera les directions ML, SR, perpendiculaires à l'arc BC, lesquelles prolongées passeroient par le centre D, où elles formeroient le triangle MDS ou LDR, dont il faut trouver l'angle D.

Pour y parvenir, on fera ML = SR, & après avoir planté des piquets aux points M, S, L, R, ainsi que quelques autres dans les directions LM, RS, du côté du centre, on placera un Graphometre en M ou en S, pour connoître les degrés de l'angle MSD ou de son égal DMS; & cet angle doublé, soustrait de 180, donnera l'angle D ou son arc LR, lequel quadruplé sera en degrés la valeur de l'arc CRB proposé.

La démonstration en est si palpable, qu'il me paroît absolument superflu de la décrire.

## *COROLLAIRE.*

Les degrés de l'arc BC une fois connus, si l'on veut avoir l'aire du cercle auquel cet arc appartient, on en cherchera la longueur en toises, pieds, pouces, &c. Je suppose cette courbe longue de 17 pieds, & de 48°. en ce cas, puisque 48°. donnent 17 pieds, combien produiront 360°.? Le quatrieme terme de cette proportion fera connoître en pieds la longueur de la circonférence, d'où l'on déduira le diametre, & par conséquent l'aire du plan proposé.

FIN.

## *EXTRAIT DES REGISTRES*

### *de l'Académie Royale des Sciences.*

Du 15 Janvier 1746.

MEſſieurs le Monnier & d'Alembert, qui avoient été nommés pour examiner un Ouvrage de M. de la Chapelle, intitulé : *Inſtitutions de Géométrie, &c.* en ayant fait leur rapport, la Compagnie a jugé que cet Ouvrage méritoit ſon approbation, tant par l'ordre & la clarté qui y regnent, que par la méthode nouvelle à pluſieurs égards avec laquelle l'Auteur a traité un ſujet déja tant de fois manié. En foi de quoi j'ai ſigné le préſent certificat. A Paris, ce 24 Janvier 1746.

GRANDJEAN DE FOUCHY, Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

---

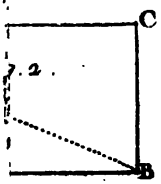
## *Approbation du Cenſeur Royal.*

J'Ai lu, par ordre de Monſeigneur le Chancelier, la nouvelle impreſſion des *Inſtitutions de Géométrie*, & les augmentations que l'Auteur a faites ; j'ai cru qu'elles étoient utiles, & ne rendroient l'Ouvrage que plus parfait. A Paris, ce 5 Juillet 1764.

MONTCARVILLE, *Lecteur & Profeſſeur Royal.*

---

De l'Imprimerie de la Veuve DELATOUR, 1765.



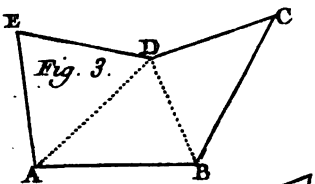




Fig. 3.

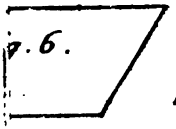


Fig. 7.

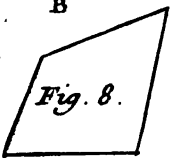
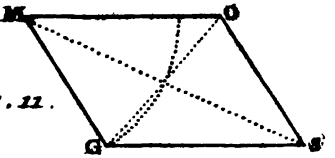


Fig. 8.

Fig. 11.



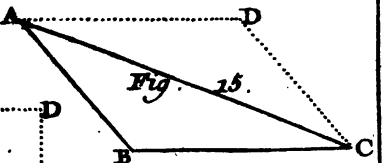




Fig. 15.

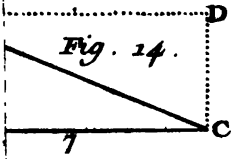
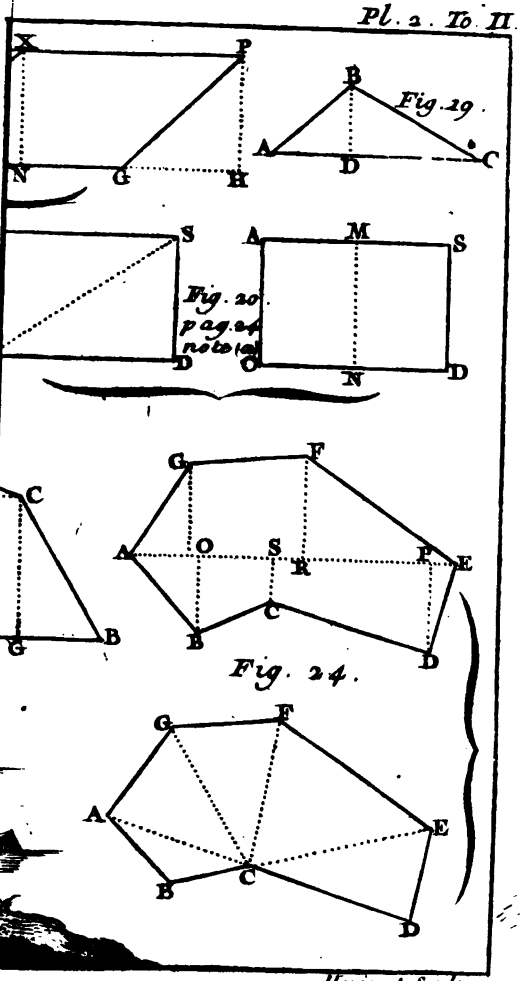
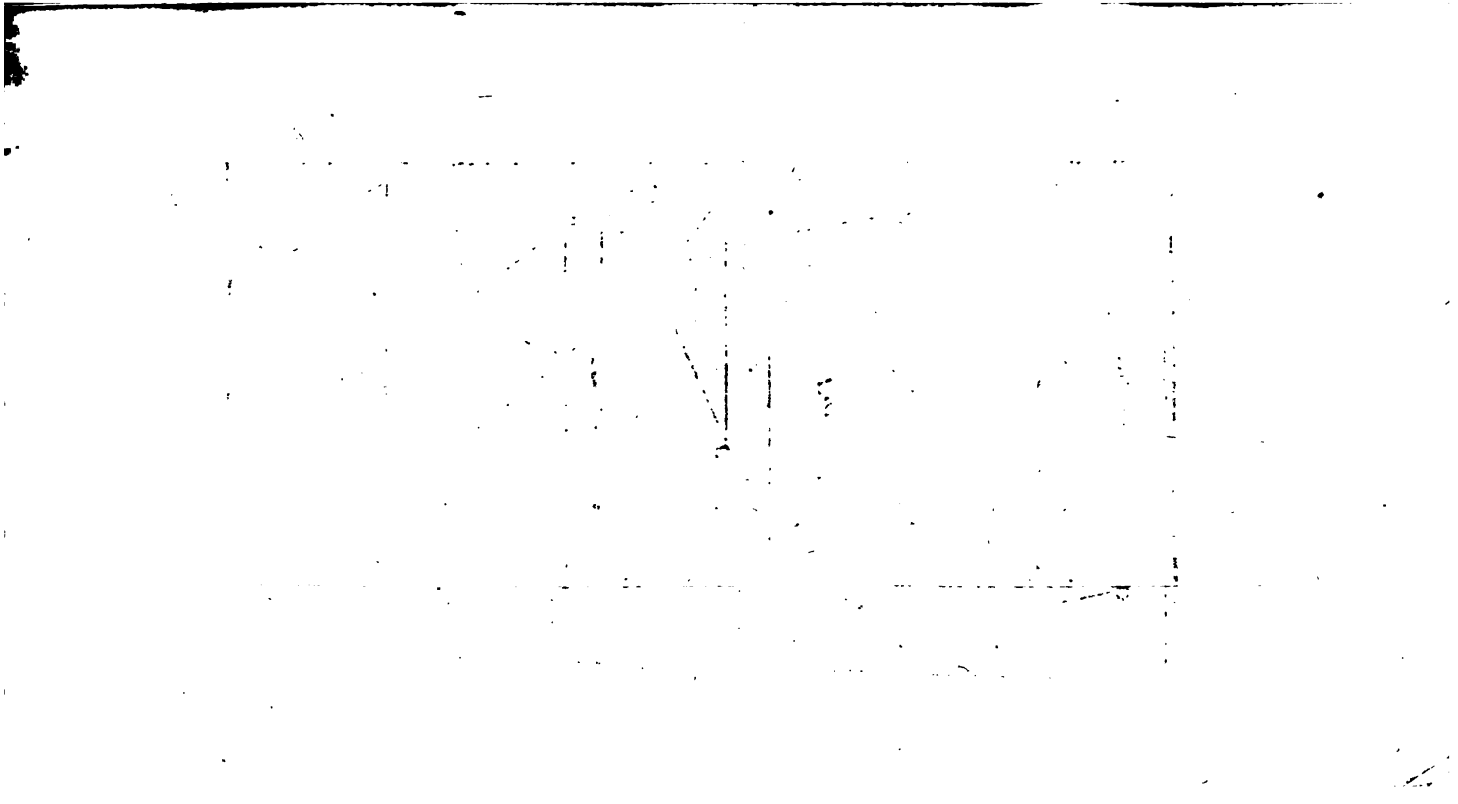



Fig. 14.

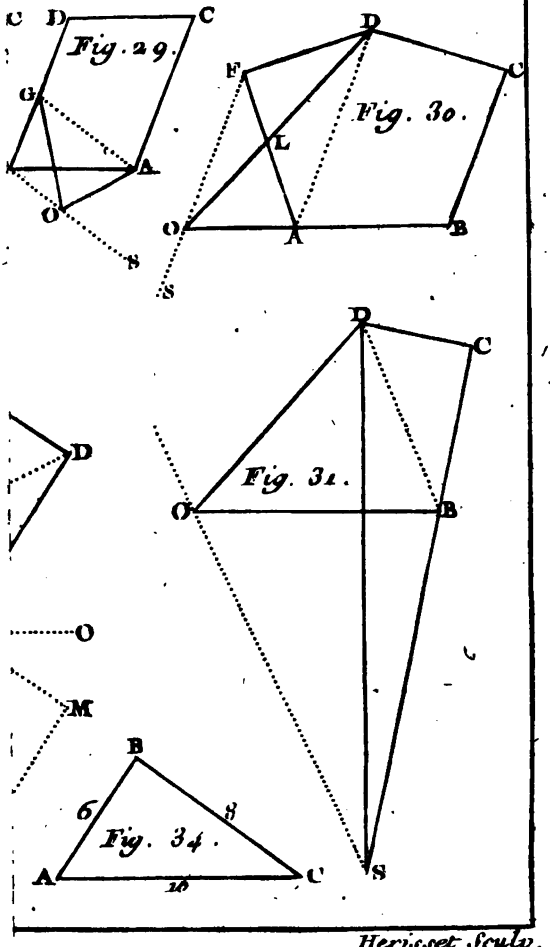
Herisset Sculp.

UNIV OF MIC

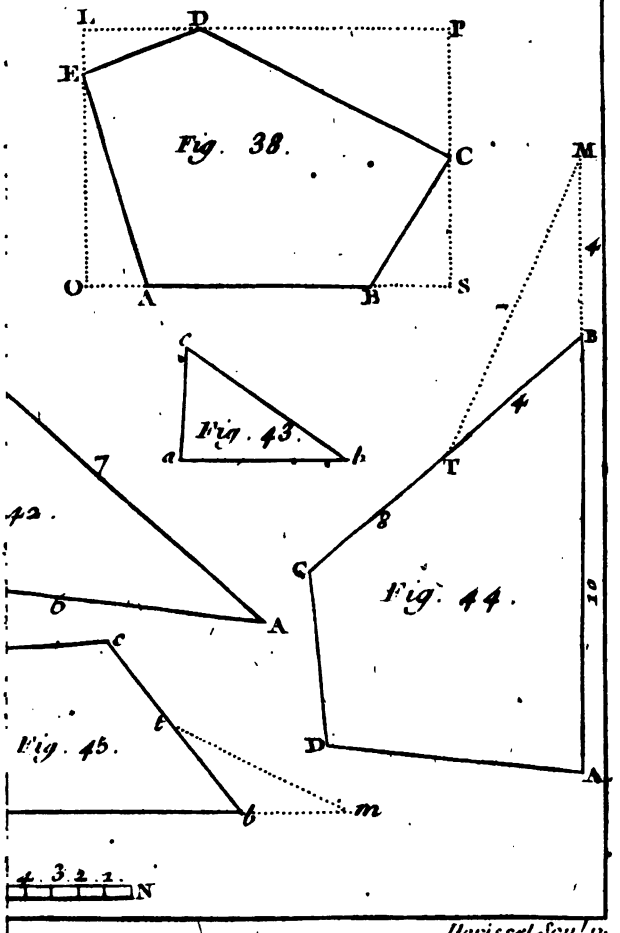

X
P
N
G
H
B
A
D
C
Fig. 19.
S
D
A
M
S
O
N
D
Fig. 20
page 24
notes
G
F
C
A
O
S
R
F
E
G
B
C
D
Fig. 24.
G
F
A
E
B
C
D
Herisset Sculp.

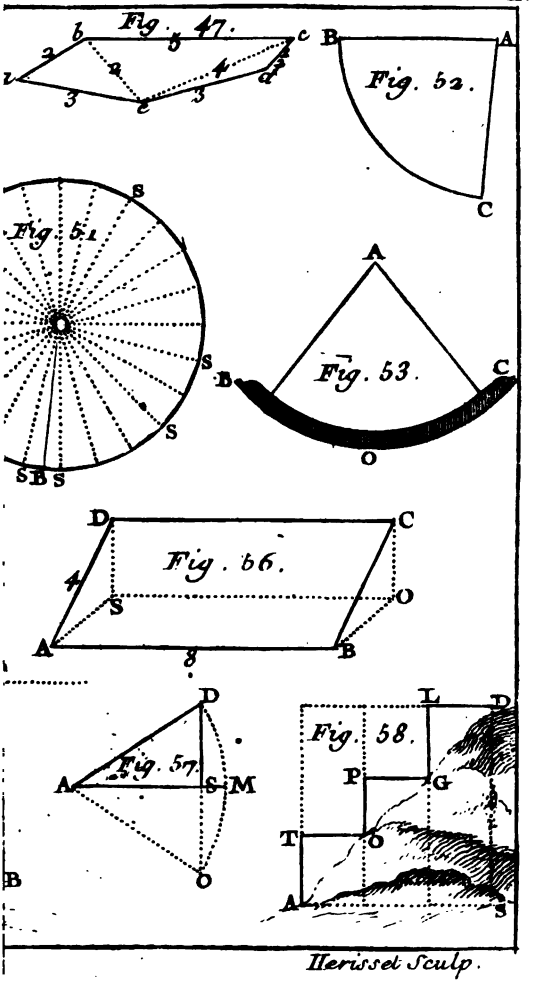


Pl. 3. To. II.

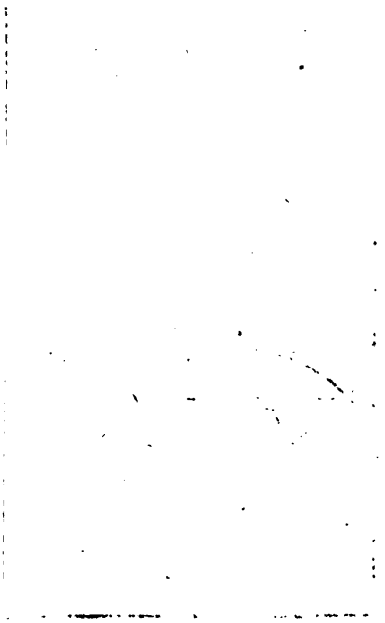


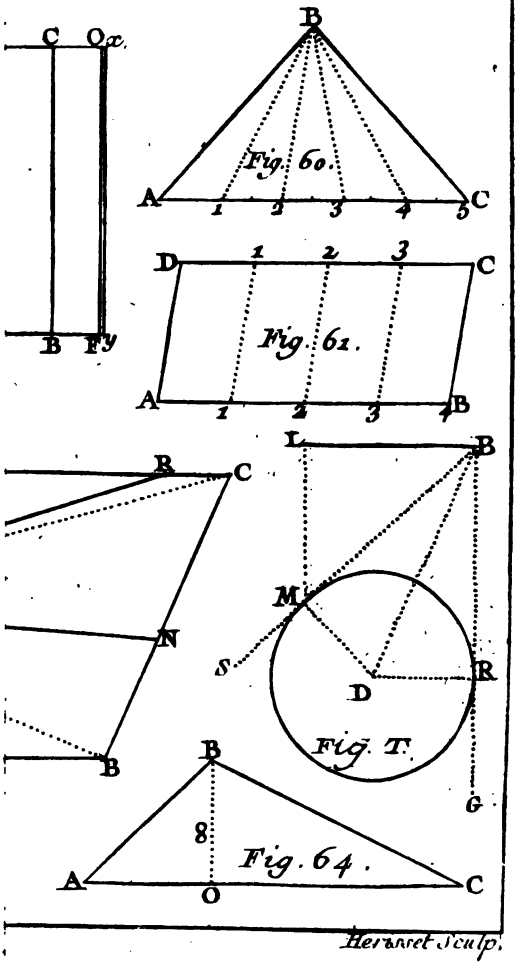

Herisset Sculp.


I.
D
P
E
C
O
A
B
S
Fig. 38.
M
4
7
B
c
Fig. 43.
a
b
4
T
7
42.
8
C
Fig. 44.
6
A
c
Fig. 45.
b
D
A
m
4 3 2 1
N
Herisset Sculp.

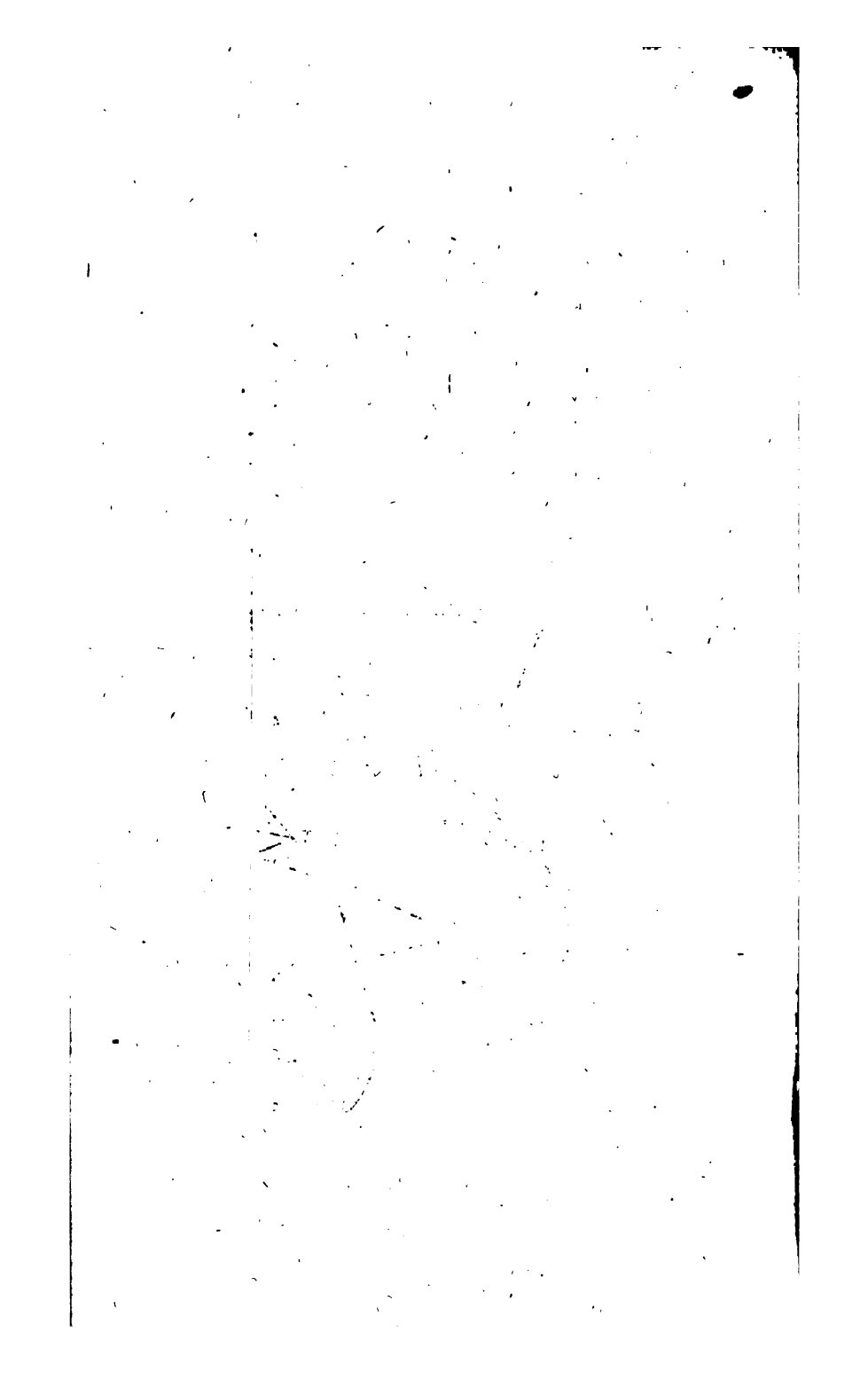


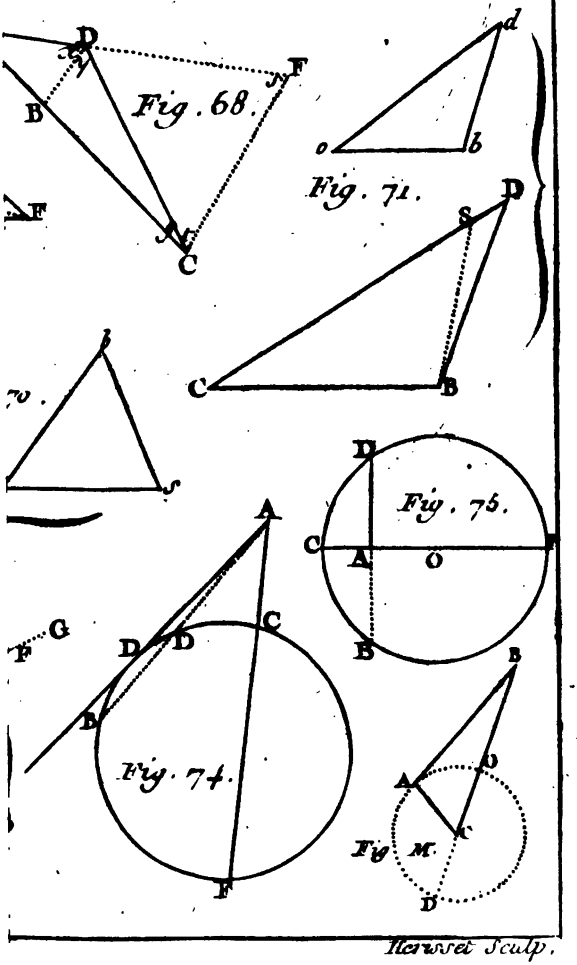

UNIV. OF



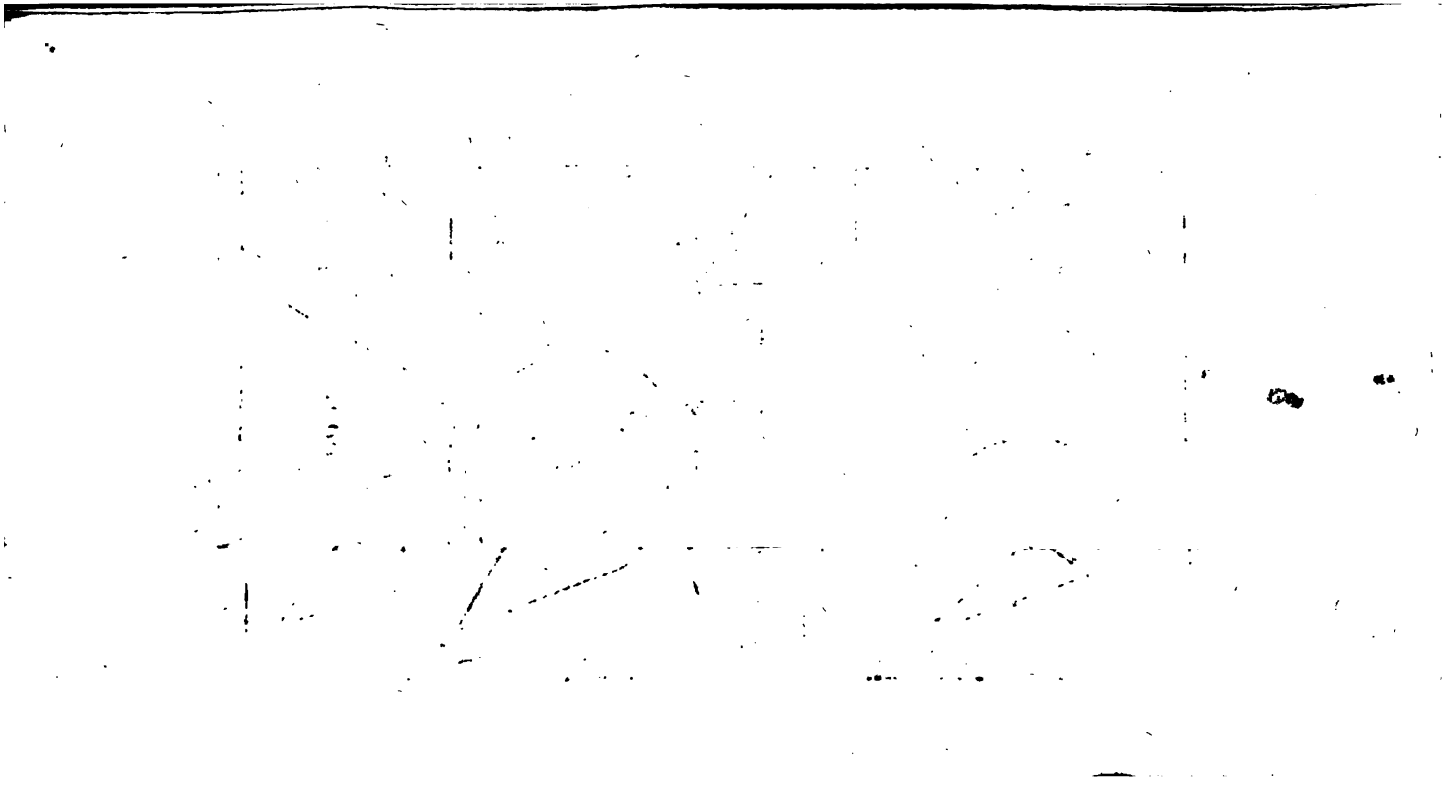

C
O
x
B
F
y
B
A
1
2
3
4
C
Fig. 60.
D
1
2
3
C
A
1
2
3
B
Fig. 61.
B
C
N
B
L
B
M
S
D
R
Fig. 7.
G
B
8
A
O
C
Fig. 64.
Heravet Sculp.

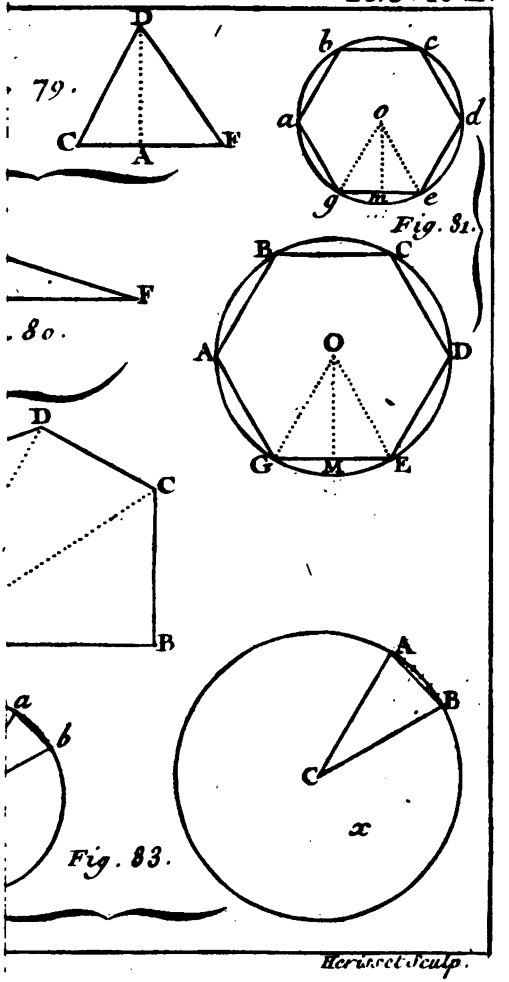
UNIV. OF MICH.






Hennet Sculp.




79.
D
C
A
F
b
c
a
o
d
g
m
e
Fig. 81.
F
.80.
B
C
A
O
D
G
M
E
D
C
B
a
b
A
B
C
x
Fig. 83.
Heriſſet Sculp.

UNIV. OF MICH.

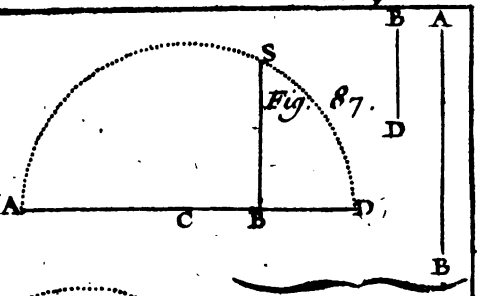



Fig. 87.

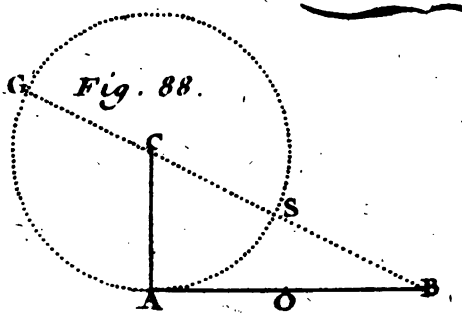
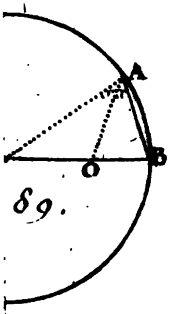



Fig. 88.




89.

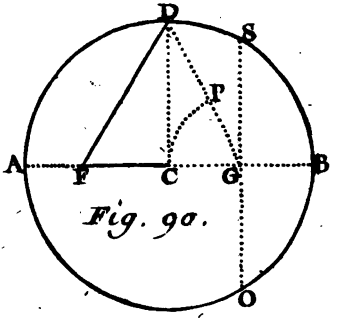
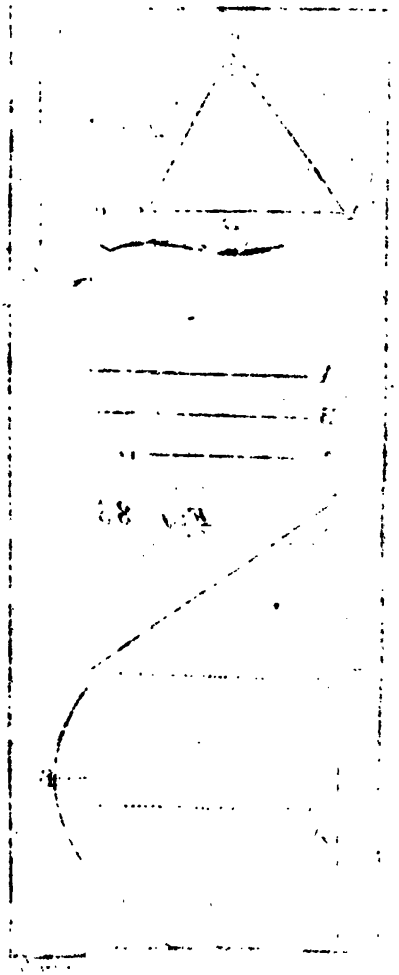
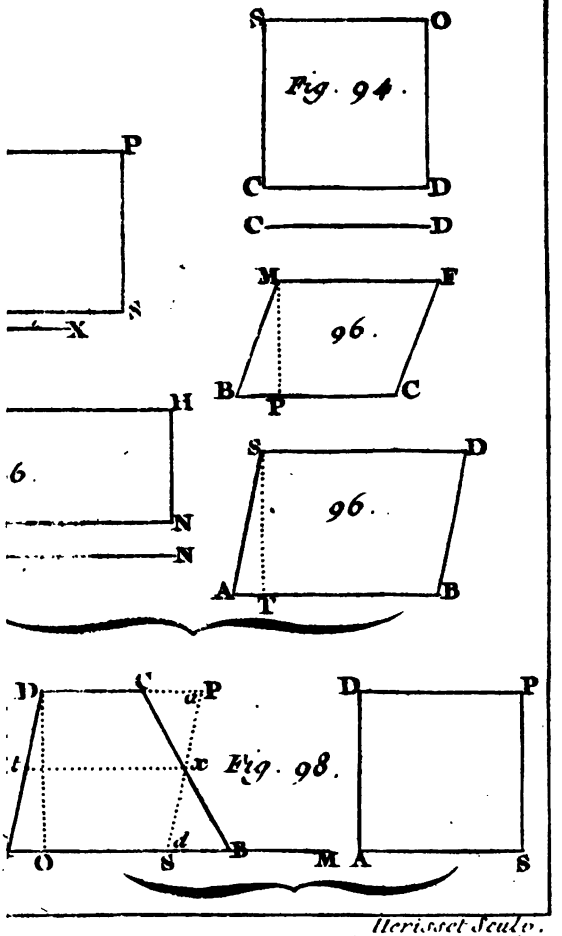



Fig. 90.

Herisset Sculp.

UNIV. OF MICH.






Herisset Sculp.

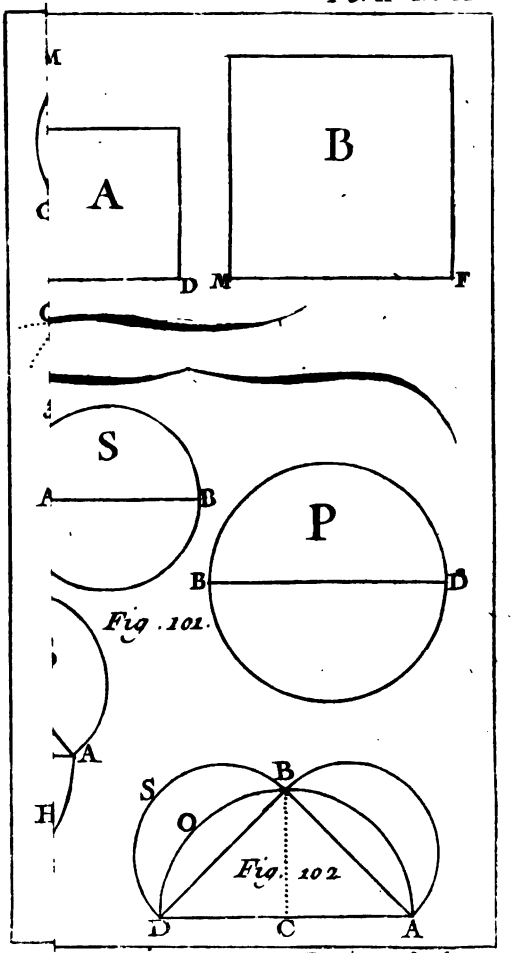



Fig. 101.

Fig. 102.

Heridinet Sculp.

Fig. 106.

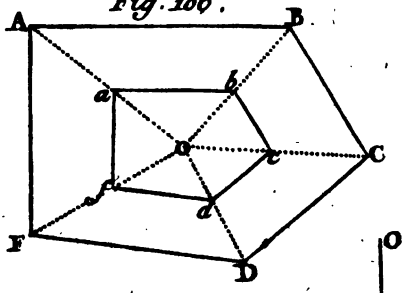
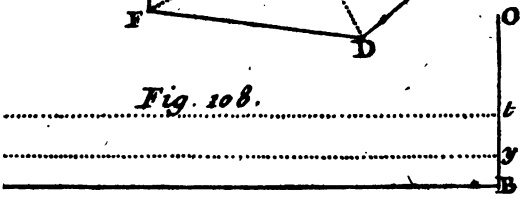



Fig. 108.



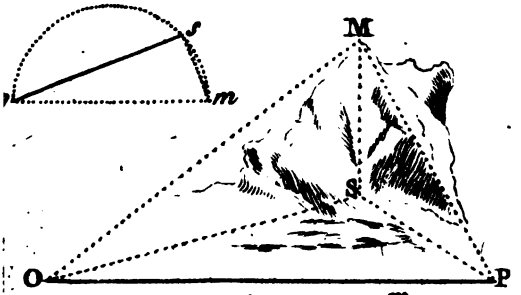
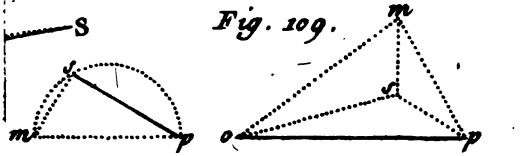
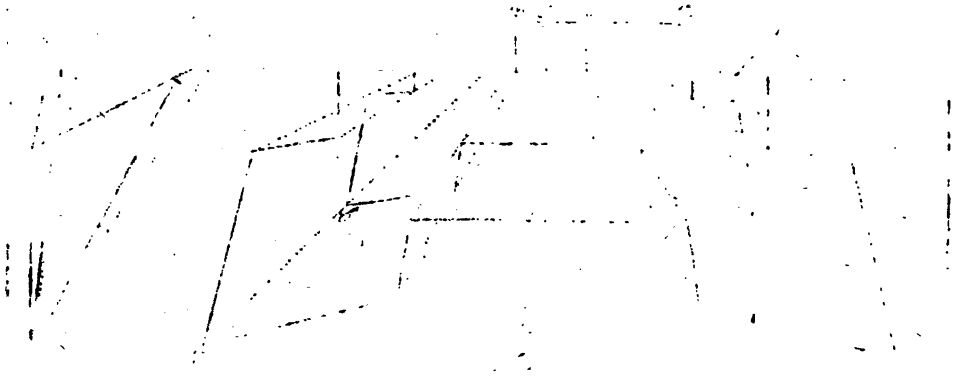




Fig. 109.




Herisset Sculp.

UNIV. OF MICH.



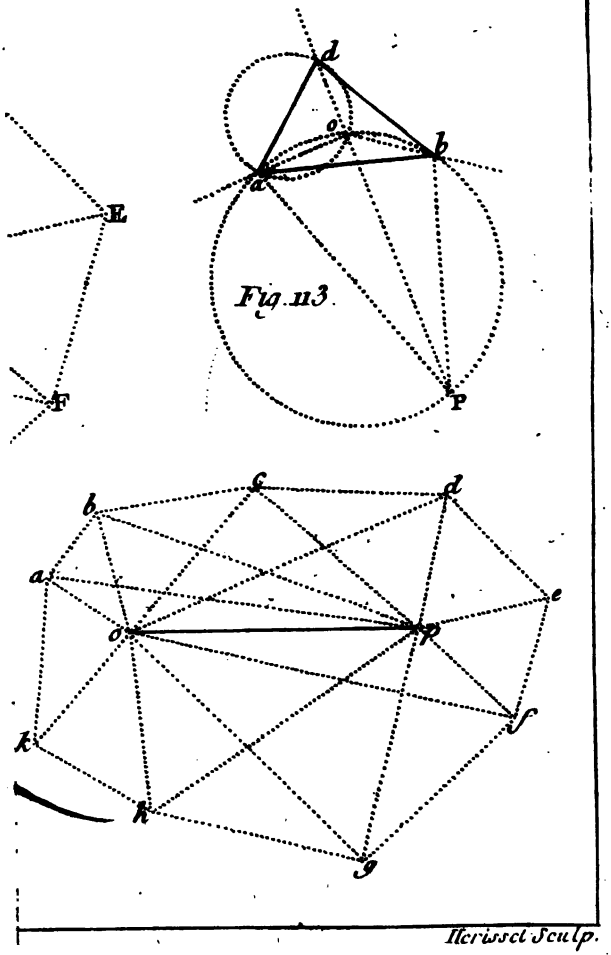
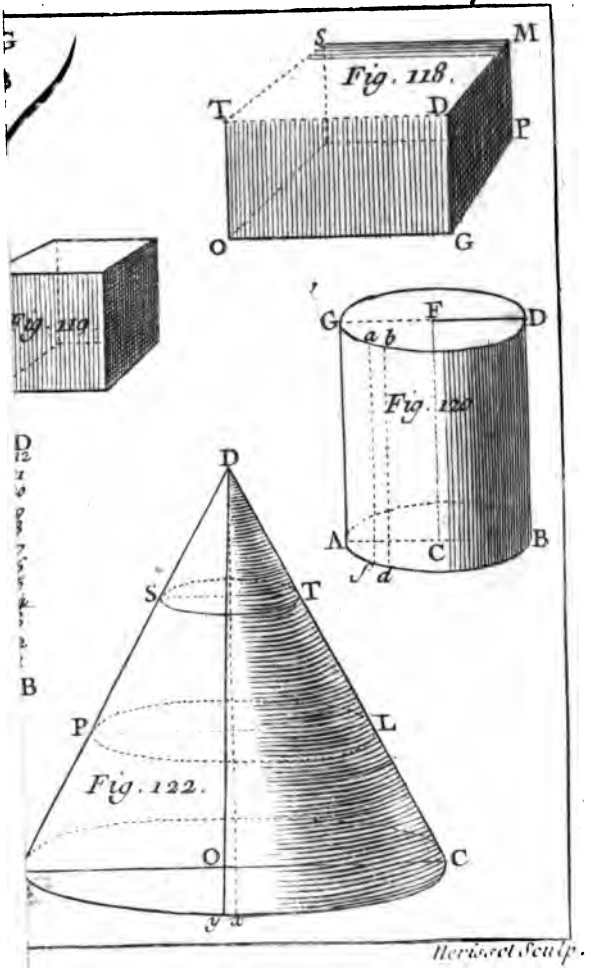



Fig. 113.

Herisset Sculp.

UNIV. OF MICH.




Herisset Sculp.

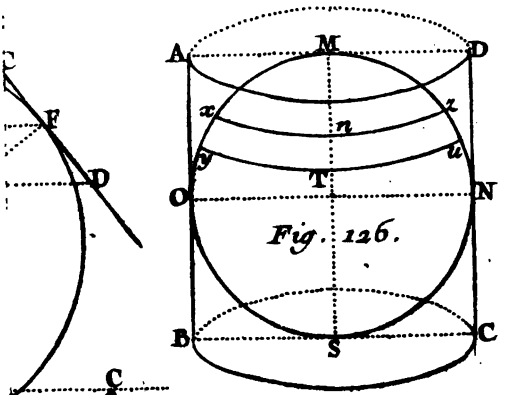



Fig. 126.

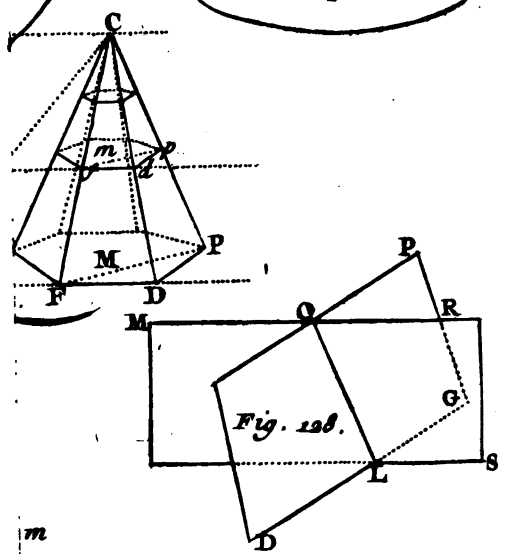



Fig. 128.

m

Harinel Sculp.

Pl. 16. Tom. II.

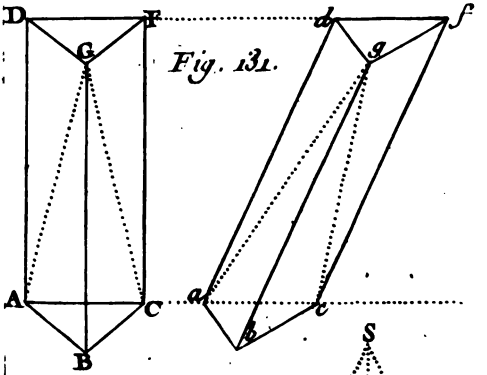



Fig. 131.

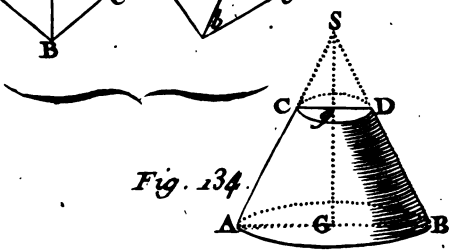



Fig. 134.

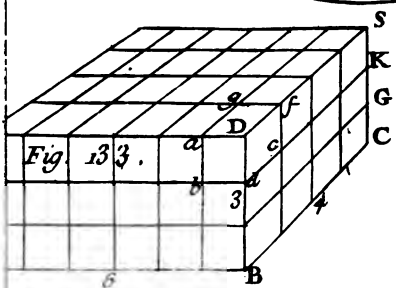
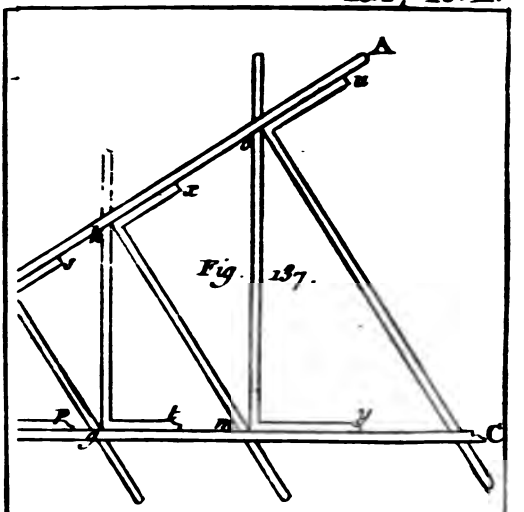


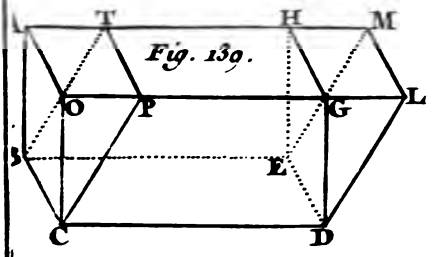

Fig. 133.

Horisset Sculp.

Pl. 17. To. II.

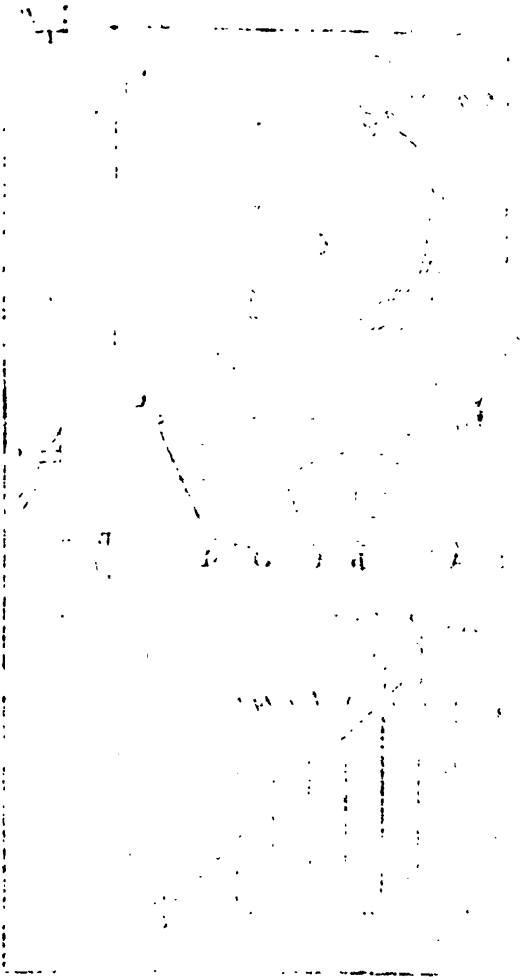


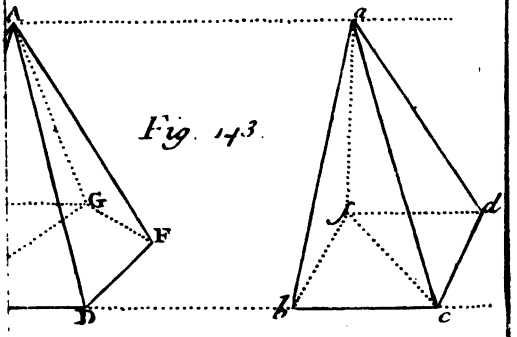

M

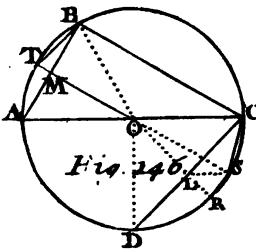


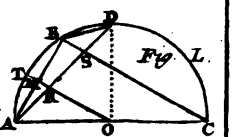

Harisset Sculp.

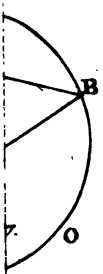
NIV. OF MICH.

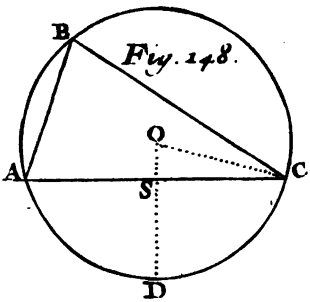





Hemisset sculp.

OF MICH

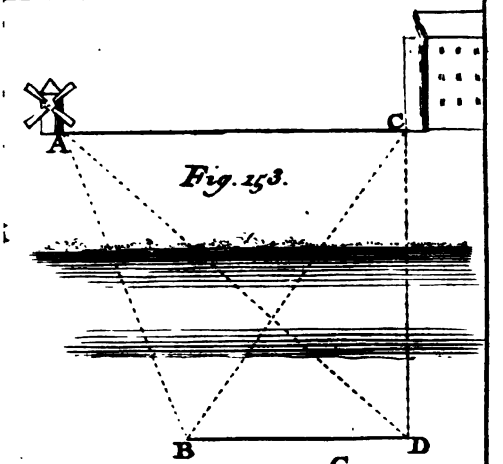



Fig. 153.

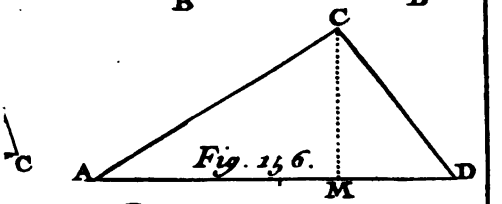



Fig. 156.

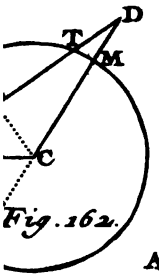



Fig. 162.

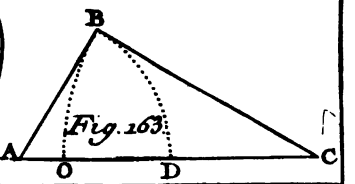
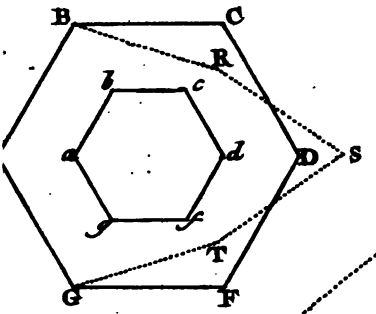



Fig. 163.

Heriaret sculp.



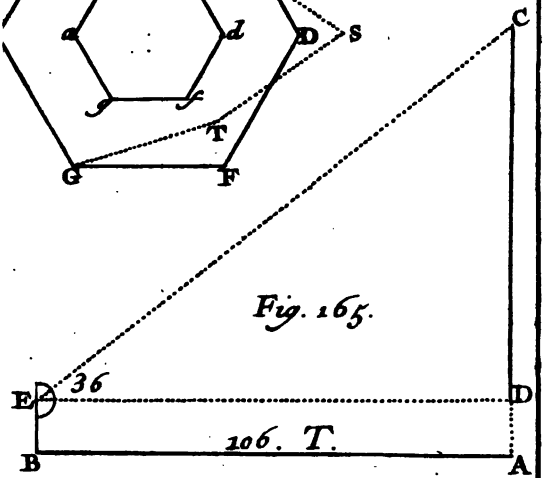
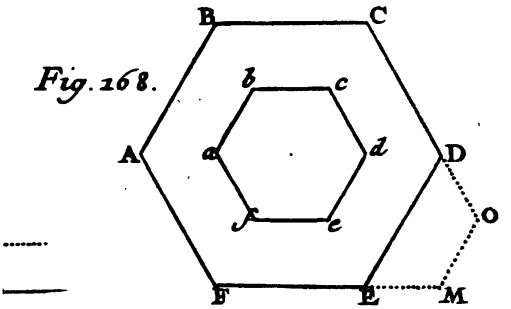



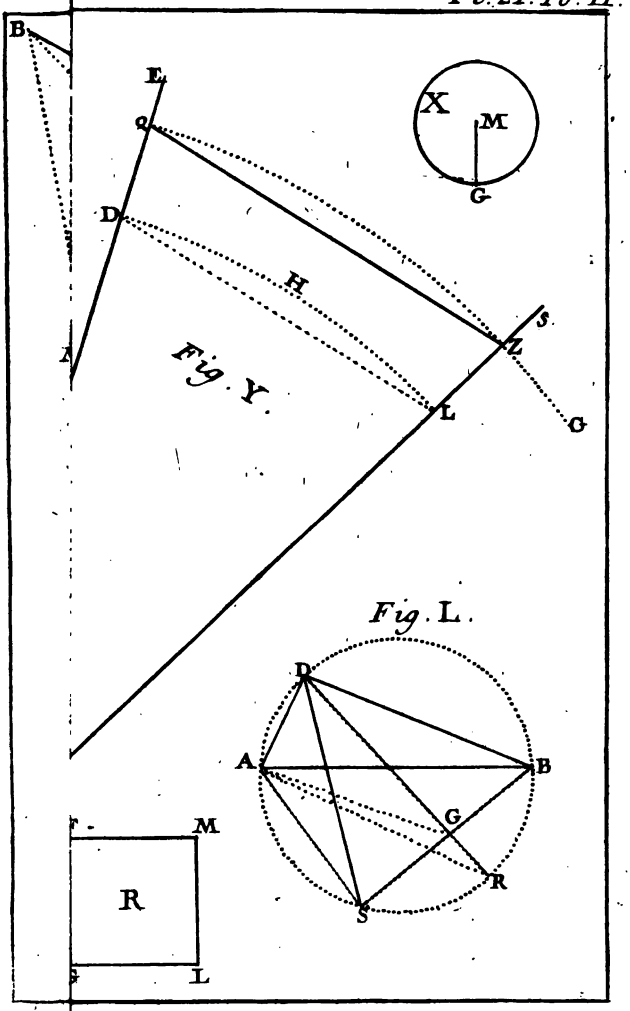

Fig. 165.

Fig. 168.




Horisset Sculp.

BIBLIOTECA DE MADRID


B
E
q
D
H
A
Fig. Y.
X
M
G
s
L
L
G
Fig. L.
D
A
B
G
R
S
M
R
L